3e — Contrôle commun de mathématiques — 6 / 12 / 2012
Éléments de correction

Durée : 50 minutes. L'usage de la calculatrice est autorisé. *Soin, présentation, orthographe, rédaction :* **1 point**

Exercice 1 ***(5 points ; une bonne réponse apporte 0,5 point ; une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point) .***

1) C $(10^{-3})^2 \times 10^5 = 10^{-3\times2+5} = 10^{-1}$

2) A 1 028 et 306 sont pairs ;
1 029 et 306 sont multiples de 3 (car la somme de leurs chiffres est elle-même multiple de 3 : 1+0+2+9=12 et 3+0+6=9) ;
1 est le seul diviseur positif commun à 1 027 et 306.

3) B L'écriture scientifique de 0,021 4 est $2{,}14 \times 10^{-2}$ (produit d'un nombre écrit avec **exactement un** chiffre non nul devant la virgule et d'une puissance de 10, et égal à 0,021 4)

4) A $\dfrac{-5}{6} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{-5\times3}{6\times3} + \dfrac{4\times2}{9\times2} = \dfrac{-15+8}{18} = -\dfrac{7}{18}$

5) A $\dfrac{5}{7} - \dfrac{1}{7} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{5\times3}{7\times3} - \dfrac{1\times4}{7\times3} = \dfrac{15-4}{21} = \dfrac{11}{21}$

6) A $\dfrac{5}{7} \times 3 = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{5\times3}{7\times1} = \dfrac{15}{7}$

7) A Pour $x=5$, $-3\,x^2 = -3\times5^2 = -3\times25 = -75$

8) B $(4x-3)(x-5) = 4x\times x - 4x\times5 - 3\times x + 3\times5 = 4x^2 - 20x - 3x + 15 = 4x^2 - 23x + 15$

9) B $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\times2x\times3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

10) C $(7x+1)(7x-1) = (7x)^2 - 1^2 = 49x^2 - 1$

Exercice 2 ***(5,5 points)***

1) Calcul du PGCD des nombres 415 et 581.

- méthode 1 : avec les listes de diviseurs :
  diviseurs de 415: 1 ; 5 ; 83 ; 415.
  diviseurs de 581: 1 ; 7 ; 83 ; 581.
  diviseurs communs à 415 et 581: 1 ; 83.
  D'où : PGCD (415; 581) = 83.
- méthode 2 : avec l'algorithme d'Euclide :
  si r est le reste de la division euclidienne de a par b , alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) .
  581 = 415 × 1 + 166 , donc PGCD (581 ; 415) = PGCD (415 ; 166)
  415 = 166 × 2 + 83 , donc PGCD (415 ; 166) = PGCD (166 ; 83)
  166 = 83 × 2 + 0 , donc PGCD (166 ; 83) = 83
  d'où : PGCD (415 ; 581) = 83.
- méthode 3 : avec les décompositions en produits de nombres premiers :
  $415 = 5 \times 83$ et $581 = 7 \times 83$;
  donc PGCD (415 ; 581) = 83.

2) a) ***(2 points)*** Nombre maximal de lots qu'elle peut préparer.

Zabou Teil veut des lots identiques et pas de reste : le nombre de lots divise le nombre de bouteilles de KIBULL et le nombre de bouteilles de BULPA. Le nombre maximal de lots est donc le PGCD de 415 et 581, c'est-à-dire 83.

b) *(1 point)* Prix de vente d'un lot, sachant que :

- une bouteille de KIBULL lui revient à 0,46 € ;
- une bouteille de BULPA lui revient à 0,35 € ;
- elle désire gagner 1,20 € par lot.

Le nombre de bouteilles de KIBULL par lot est égal au nombre total de KIBULL divisé par le nombre de lots : 415 : 83 = 5
De même, le nombre de bouteilles de BULPA par lot est : 581 : 83 = 7
Le prix d'un lot est égal au prix de revient de chaque bouteille augmenté du bénéfice :
$5 \times 0{,}46 + 7 \times 0{,}35 + 1{,}20 = 5{,}95$.
Chacun des 83 lots de 5 bouteilles de KIBULL et 7 bouteilles de BULPA coûtera 5,95 €.

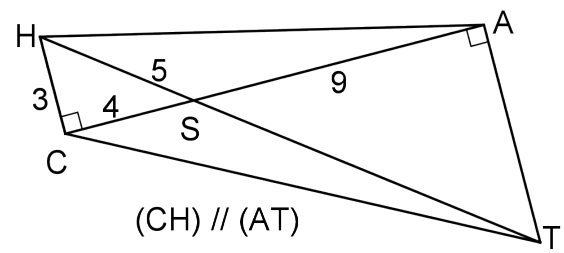
Exercice 3 ***(2 points)*** Christian affirme : " Tout nombre pair compris entre 9 et 17 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ". A-t-il raison ?

Nous avons : $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; $14 = 3 + 11 = 7 + 7$; $16 = 3 + 13 = 5 + 11$,

où 3 ; 5 ; 7 et 11 sont des nombres premiers (ils ont exactement deux diviseurs : 1 et eux-mêmes).
Donc Christian a raison.

Note. Christian GOLDBACH (1 690 - 1 764) était un mathématicien allemand. Datée de 1 742, la conjecture de GOLDBACH propose que tout nombre pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers.

Exercice 4 ***(6,5 points)*** 1) Calcul de la longueur ST.



La figure n'est pas en vraie grandeur.
L'unité est le cm.

Les points C, S, A sont alignés et distincts;
les points H, S, T sont alignés et distincts ;
les droites (CH) et (AT) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CS}{SA} = \dfrac{HS}{ST} = \dfrac{CH}{AT}$.
D'où $\dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{ST}$.
Les nombres sont égaux : les produits en croix sont égaux ;
d'où $4 \times ST = 9 \times 5$; $ST = \dfrac{45}{4}$; ST = 11,25 cm.

2) L'angle $\widehat{SCH}$. [SH] est le côté le plus long du triangle CHS.
Je calcule : • $SH^2 = 5^2 = 25$
• $CH^2 + CS^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
Je compare : $SH^2 = CH^2 + CS^2$.
Je conclus : d'après la réciproque du théorème de Pythagore ,
le triangle SCH est rectangle en C,
donc $\widehat{SCH} = 90°$.

3) La longueur AH.
Le triangle CHA est rectangle en C;
son hypoténuse est [AH].
D'après le théorème de Pythagore,
$AH^2 = CH^2 + CA^2$;
d'où $AH^2 = 3^2 + (4 + 9)^2$; $AH^2 = 178$
AH est une longueur,
donc un nombre positif.
$AH = \sqrt{178}$ cm ;
$AH \approx 13{,}3$ cm *(longueur arrondie au mm).*

Bonus. Calculer l'aire et le périmètre de CHAT.
* On calcule AT comme en 1). On trouve AT = 6,75 cm.
* On en déduit l'aire de CHAT :
$\text{Aire d'un trapèze} = \dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$
$\text{Aire}_{CHAT} = \dfrac{(HC + AT) \times CA}{2} = \dfrac{(3 + 6{,}75) \times (4 + 9)}{2} = 63{,}375 \text{ cm}^2$
* Nature du triangle CAT.
Nous avons : $\widehat{SCH} = 90°$, donc $(HC) \perp (CA)$; de plus, (CH) // (AT).
Nous savons: si deux droites sont parallèles,
alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Nous concluons : $\widehat{CAT} = 90°$, et CAT est rectangle en A.
On calcule alors CT comme en 3), dans le triangle CAT rectangle en A.
On trouve $CT = \sqrt{214{,}562\,5}$ cm
On en déduit le périmètre de CHAT.
On trouve $P_{CHAT} = 9{,}75 + \sqrt{178} + \sqrt{214{,}562\,5}$ cm ;
$P_{CHAT} \approx 37{,}7$ cm (arrondi au mm)