3e	Brevet blanc - Mathématiques Éléments de correction	Mardi 12 février 2013

Durée : 2 heures *L'usage de la calculatrice est autorisé.*
Soin, présentation, orthographe, rédaction : 1 ***point***

Exercice 1 ***(5 points)*** 1) $\sqrt{2013} \approx 44{,}87$ (arrondi au centième)

2) a) $2013^2 = 4\ 052\ 169$

b) $2013^2 = (\ 2\ 000 + 13\ )^2$

$= 2\ 000^2 + 2 \times 2\ 000 \times 3 + 13^2$

$= 4\ 000\ 000 + 12\ 000 + 169$

Si Théo écrit comme résultat $2013^2 = 4\ 000\ 169$, c'est vraisemblablement qu'il a oublié d'ajouter le double produit à la somme des carrés !

3) Décomposition de 2 013 en produit de trois nombres premiers : $2\ 013 = 3 \times 11 \times 61$.

4) Calcul de PGCD (2012 ; 2013).

Première méthode : on utilise la décomposition de 2 013 en produit de trois nombres premiers.

On vérifie à la calculatrice que 2 012 n'est multiple ni de 3, ni de 11, ni de 61 :

$2\ 012 : 3 \approx 670{,}67$; $2\ 012 : 11 \approx 182{,}91$; $2\ 012 : 61 \approx 32{,}98$ (arrondis au centième)

Donc PGCD (2012 ; 2013) = 1.

Une autre méthode : on utilise l'algorithme d'Euclide.

Si r est le reste de la division euclidienne de a par b , alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

$2\ 013 = 2\ 012 \times 1 + 1$

$2\ 012 = 1 \times 2\ 012 + 0$

Le dernier reste non nul est 1 ; donc PGCD (2012 ; 2013) = 1.

5) Soit n un nombre entier positif ; le nombre entier consécutif est $n + 1$.

On utilise l'algorithme d'Euclide.

$n + 1 = n \times 1 + 1$

$n = 1 \times n + 0$

Le dernier reste non nul est 1 ; donc PGCD ($n + 1$; n) = 1.

L'affirmation "Le PGCD de deux nombres entiers consécutifs est toujours égal à 1" est donc vraie.

Exercice 2 ***(5 points)***

1) On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- L'élever au carré.
- Multiplier le résultat par 3.
- Ajouter 2.

a) $4 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 16 \times 3 = 48 \rightarrow 48 + 2 = 50$

En choisissant 4 comme nombre de départ, Arthur obtient 50.

b) $x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 \times 3 = 3\ x^2 \rightarrow 3\ x^2 + 2$. Avec x comme nombre de départ, on obtient $3\ x^2 + 2$.

c) Amina obtient 1 325. Soit x son nombre de départ ; d'après b) son résultat est $3\ x^2 + 2$.

Alors : $3\ x^2 + 2 = 1\ 325$.

$3\ x^2 = 1323$

$x^2 = 441$

$x = 21$ ou $x = -21$

L'équation ayant **deux** solutions, on ne peut pas connaître de façon **certaine** son nombre de départ.

d) Mona obtient 0. Amina lui dit qu'il y a au moins une erreur dans son travail. A-t-elle raison ?

Nous avons maintenant $3x^2 + 2 = 0$; donc $3x^2 = -2$, et $x^2 = -\frac{2}{3}$.

Comme un carré de nombre réel est positif, c'est impossible !

Amina a raison en disant à Mona qu'elle s'est trompée.

2) Un développement

$$A = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 .$$
$$A = x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1$$
$$A = 3x^2 + 2$$

3) Soit x un nombre entier positif supérieur ou égal à 1;

le nombre entier précédent est $x - 1$; le nombre entier consécutif est $x + 1$.

La somme de leurs carrés est $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2$; d'après 2), c'est $3x^2 + 2$.

Nous cherchons donc x tel que $3x^2 + 2 = 1\,325$; d'après 1) c) , $x = 21$ ou $x = -21$.

Seule la solution positive convient ici. Vérification : $20^2 + 21^2 + 22^2 = 1\,325$.

Les nombres cherchés sont donc 20 ; 21 et 22.

Exercice 3 ***(3 points)*** Cocher la bonne réponse - et uniquement celle-là -, sans justification.

Pour les questions **1** à **3**, on considère la fonction f définie par $f(x) = (-1 + x)(x + 3)$.			
1. L'image de 3 par f est : $f(3) = (-1+3)(3+3) = 2 \times 6 = 12$	■ 12	□ $2(x+3)$	□ − 24
2. Un antécédent de − 4 par f est $f(-1) = (-1+(-1))(-1+3) = -2 \times 2 = -4$	□ 0	■ − 1	□ − 2
3. L'image de $1 - \sqrt{2}$ par f est : $f(1-\sqrt{2}) = (-1+1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}+3) = -\sqrt{2}(4-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \times 4 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 - 4\sqrt{2}$	■ $2 - 4\sqrt{2}$	□ $2 + 2\sqrt{2}$	□ $2 + 3\sqrt{2}$
Les questions suivantes sont indépendantes.			
4. Soit la fonction g définie par $g(x) = -2x^2$. − 2 est image de : $g(1) = -2 \times 1^2 = -2$ et $g(-1) = -2 \times (-1)^2 = -2 \times 1 = -2$	□ 0	■ 1 et − 1	□ 2
5. Soit la fonction $h : x \to 4 - x^2$. −1 a pour image : $h(-1) = 4 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$	□ 5	■ 3	□ 6
6. Soit k la fonction telle que $k(x) = \sqrt{x-1}$. Alors : 0 − 1 = − 1; ce nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée	□ 5 a pour image − 2 par k ■ 0 n'a pas d' image par k □ 2 est l'image de − 3 par k		

Exercice 4 ***(4,5 points)***

1) a) $\dfrac{3{,}9 \times (10^{-3})^2}{3 \times 10^{-7}} = \dfrac{3 \times 1{,}3 \times 10^{-3\times2}}{3 \times 10^{-7}} = 1{,}3 \times 10^{-6+7} = 1{,}3 \times 10 = 13$;

b) $\left(2 + \dfrac{2}{3}\right) : \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{6}{3} + \dfrac{2}{3}\right) : \left(\dfrac{4\times3}{5\times3} - \dfrac{2\times5}{3\times5}\right) = \dfrac{8}{3} : \left(\dfrac{12}{15} - \dfrac{10}{15}\right) = \dfrac{8}{3} : \dfrac{2}{15} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{15}{2} = \dfrac{4\times2\times5\times3}{3\times2} = 20$

c) $\dfrac{4 \times \sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4 \times \sqrt{4\times6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4 \times \sqrt{4}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6} \times 1} = 4 \times 2 = 8$.

2) Les diviseurs de 35 sont 1 ; 5 ; 7 ; 35 ; les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ;

donc PGCD (35 ; 12) = 1.

3) On construit un codage de la façon suivante :

A est codé par 1 ; B est codé par 2 ; ... ; Z est codé par 26.

a) La lettre codée par 13 est M.

b) Le 13 de la question 1) a) code M ; le 20 de 1) b) code T ; le 8 de 1) c) code H ; le 1 de la question 2) code A ; on reconnaît le début du nom de métier : mathématicienne.

Exercice 5 ***(2 points)*** Pour faciliter la comparaison, nous cherchons les écritures scientifiques des distances, en km :

Alpha : 105×10^6 km $= 1{,}05 \times 10^8$ km ;

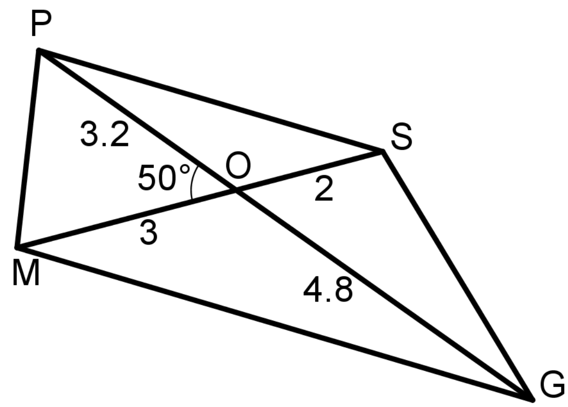
Bêta : $2\,250 \times 10^8$ m $= 2\,250 \times 10^5$ km ; d'où $2\,250 \times 10^8$ m $= 2{,}25 \times 10^8$ km ;

Gamma : $1{,}5 \times 10^{13}$ cm $= 1{,}5 \times 10^8$ km .

La planète la plus éloignée de l'étoile Star est donc la planète Bêta.

Remarque. On reconnaît des approximations des distances entre le Soleil et les planètes Vénus (Alpha), Terre (Gamma) et Mars (Bêta).

Exercice 6 ***(5,5 points)*** 1) On suppose que $\widehat{POM} = 50°$.



a) Construction de la figure.

b) Les droites (SP) et (MG) .

Les points P, O et G sont alignés ;

les points S, O et M sont alignés dans le même ordre.

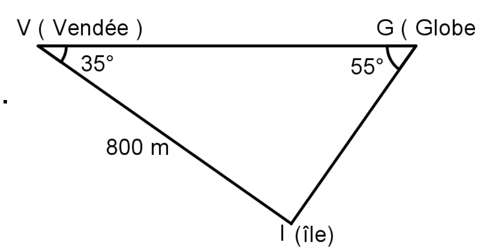
- Je calcule : $\dfrac{PO}{OG} = \dfrac{3{,}2}{4{,}8} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{SO}{OM} = \dfrac{2}{3}$.
- Je compare : $\dfrac{PO}{OG} = \dfrac{SO}{OM}$.
- Je conclus : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (SP) // (MG).

2) On suppose que $\widehat{POM} = 90°$. Les longueurs n'ont pas changé, donc l'étude précédente est encore valable; on a toujours : (SP) // (MG).

3) Les diagonales d'un rectangle ont le même milieu, ce qui n'est pas le cas ici, quel que soit $\widehat{POM}$.

On ne peut donc pas trouver une valeur de $\widehat{POM}$ pour que PSGM soit un rectangle.

Exercice 7 ***(5 points)***



* Nature du triangle VIG

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

$\widehat{VIG} = 180 - \left(\widehat{GVI} + \widehat{VGI} \right) = 180 - \left(35 + 55 \right) = 90°$;

donc le triangle VIG est rectangle en I.

* Distance GI séparant Globe de l'île

$\tan \widehat{GVI} = \dfrac{GI}{VI}$; $\tan 35° = \dfrac{GI}{800}$; $GI = 800 \times \tan 35°$ m ; $GI \approx 560$ m (au mètre près)

(ou : $\tan \widehat{VGI} = \dfrac{VI}{GI}$; $\tan 55° = \dfrac{800}{GI}$; $GI = \dfrac{800}{\tan 55°}$ m ; $GI \approx 560$ m (au mètre près))

* Distance VG séparant les deux voiliers

$\cos \widehat{GVI} = \dfrac{VI}{VG}$; $\cos 35° = \dfrac{800}{VG}$; $VG = \dfrac{800}{\cos 35°}$ m ; $VG \approx 977$ m (au mètre près)

(ou : $\sin \widehat{VGI} = \dfrac{VI}{VG}$; $\sin 55° = \dfrac{800}{VG}$; $VG = \dfrac{800}{\sin 55°}$ m ; $VG \approx 977$ m (au mètre près))

Exercice 8 ***(3 points)***

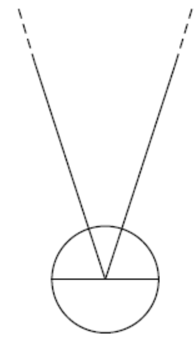
Mathilde a raison si le triangle est rectangle. Vérifions.

Le plus long côté est [AT].

- Nous calculons : $AT^2 = 17^2 = 289$
  $MA^2 + MT^2 = 8^2 + 15^2 = 289$.
- Nous comparons : $AT^2 = MA^2 + MT^2$,
- Nous concluons : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MAT est rectangle en M.

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse; il suffit bien de diviser AT par deux pour trouver son rayon. Mathilde a donc raison.

Exercice 9 ***(6 points)*** **Le lancer de poids**



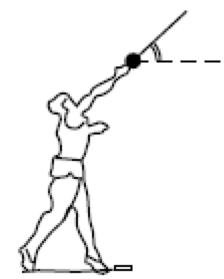
Partie I - La zone de lancer

1. À l'échelle 1/25, on représente le cercle de lancer de diamètre 2,14 m = 214 cm par un cercle de diamètre de 214 : 25 = 8,56 cm.
L'angle ne change pas.

2. Aire $\mathcal{A}$ du disque délimité par le cercle de lancer $\mathcal{A} = \pi\, r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{2{,}14}{2}\right)^2$

$\mathcal{A} = 1{,}144\,9\,\pi$ m² ; $\mathcal{A} \approx 3{,}596\,8$ m² (arrondi au cm²) .

Partie II - Trajectoires



Pour une même impulsion, la longueur du jet du poids varie en fonction de l'angle de lancer (schéma ci-contre).

Les courbes (C_1), (C_2) et (C_3) correspondent à des angles de lancer respectifs de 60 °, 40 ° et 10 °.

Nous lisons graphiquement :

1. Le poids est lâché à environ 2 m dans les trois cas.

2. La longueur du jet est la plus grande pour l'angle de lancer de 40° [courbe (C_2)].
La distance obtenue pour ce lancer est d'environ 19 m.

3. Le poids monte le plus haut pour l'angle de lancer de 60° [courbe (C_1)].
La hauteur maximale atteinte par le poids est d'environ 8,5 m.