3e Brevet blanc - Mathématiques - Éléments de correction 11 / 02 / 2014

Soin, présentation, orthographe, rédaction : ***4 points***

Exercice 1 ***(4 points)*** 1. $C(0) = (2 \times 0 - 3)^2 - 4 \times 0\,(0 - 3) = (-3)^2 = 9$

$C(1{,}5) = (2 \times 1{,}5 - 3)^2 - 4 \times 1{,}5\,(1{,}5 - 3) = 0 - 6 \times (-1{,}5) = 9$

$$C\left(\frac{3}{4}\right) = \left(2 \times \frac{3}{4} - 3\right)^2 - 4 \times \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - 3\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

2. On a $C(0) = C(1{,}5) = C\left(\frac{3}{4}\right) = 9$; <u>on conjecture que C(x) = 9 pour tout nombre x.</u>.

3. $C(x) = (2x - 3)^2 - 4x(x - 3)$

$C(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 9 - 4x \times x + 4x \times 3$

$C(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x$

<u>C(x) = 9 pour tout nombre x</u> (Remarque. L'égalité ***<u>conjecturée</u>*** en 2. est maintenant ***<u>démontrée</u>***.)

4. On pose : $N = 1\,999\,999\,999\,999\,997^2 - 4\,000\,000\,000\,000\,000 \times 999\,999\,999\,999\,997$

a) On remarque que N = C(1 000 000 000 000 000)

b) Comme C(x) = 9 pour tout nombre x, on a **<u>N = 9</u>**.

<u>Remarque</u>. *En limite de capacité, certaines calculatrices ne donnent pas le bon résultat.*

Exercice 2 ***(5 points)*** 1. Le volume intérieur de la caisse est V = ℓ x L x h.

$V = 105 \times 165 \times 105$; $\mathbf{V = 1\,819\,125\ cm^3}$

2. On peut placer ℓ : 5 = 105 : 5 = 21 boîtes en largeur ; L : 5 = 165 : 5 = 33 boîtes en longueur et h : 5 = 105 : 5 = 21 boîtes en hauteur.

Donc le <u>nombre maximal de boîtes cubiques de côté 5 cm</u> est $21 \times 33 \times 21 =$ **<u>14 553</u>**.

3. a) Les boîtes sont cubiques, identiques et remplissent entièrement la caisse : leur arête doit diviser la longueur, la largeur et la hauteur, c'est un diviseur commun à 105 et 165.
On les veut les plus grandes possibles : on cherche le PGCD de 105 et 165.

<u>Calcul du PGCD des nombres 105 et 165</u>

- <u>méthode 1 : avec les listes de diviseurs</u>
  - diviseurs de 105: 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 ; 105
  - diviseurs de 165: 1 ; 3 ; 5 ; 11 ; 15 ; 33 ; 55 ; 165
  - diviseurs communs à 105 et 165: 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; d'où : <u>PGCD (105 ; 165) = 15</u>
- <u>méthode 2 : avec l'algorithme d'Euclide</u> Si r est le reste non nul de la division euclidienne de a par b, alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r).

  $165 = 105 \times 1 + 60$, donc PGCD (165 ; 105) = PGCD (105 ; 60)

  $105 = 60 \times 1 + 45$, donc PGCD (105 ; 60) = PGCD (60 ; 45)

  $60 = 45 \times 1 + 15$, donc PGCD (60 ; 45) = PGCD (45 ; 15)

  $45 = 15 \times 3 + 0$, donc PGCD (45 ; 15) = 15

  d'où : <u>PGCD (165 ; 105) = 15</u>
- <u>méthode 3 : avec les décompositions en produits de nombres premiers</u> :

  $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $165 = 3 \times 5 \times 11$; donc PGCD (105 ; 165) = 3×5 ;

  <u>PGCD (165 ; 105) = 15</u>

<u>L'arête des boîtes est donc de 15 cm</u>.

b) Le nombre maximal de boîtes est alors N = (ℓ : 5)(L : 5)(h : 5)

$N = (105 : 15)(165 : 15)(105 : 15)$; N = $7 \times 11 \times 7$; N = 539

On peut placer au maximum **<u>539 boîtes cubiques d'arêtes 15 cm</u>**.

Exercice 3 ***(2,5 points)*** Les triangles CDG et ABG sont déterminés par :

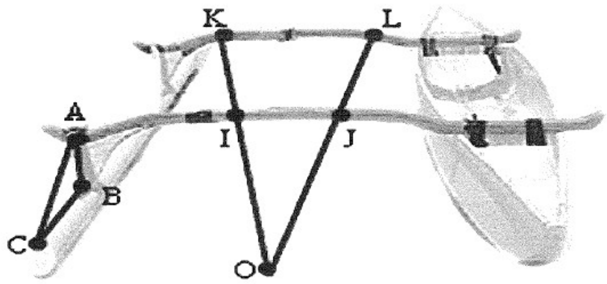
* les droites (AD) et (BC) **sécantes** en G
* les droites **parallèles** (AB) et (CD) .

D'après le théorème de Thalès, les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles : $\frac{GC}{GB} = \frac{GD}{GA} = \frac{CD}{AB}$. Je remplace : $\frac{30}{45} = \frac{30}{45} = \frac{CD}{51}$;

d'où $\frac{30}{45} = \frac{CD}{51}$; et $CD = 51 \times \frac{30}{45}$; <u>**CD = 34 cm**</u>

Exercice 4 ***(5 points)*** 1. Les triangles OIJ et OKL sont déterminés par :

- les droites (IK) et (JL) sécantes en O ;
- les droites (IJ) et (KL)



Je calcule : ○ $\frac{OI}{OK} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$

○ $\frac{OJ}{OL} = \frac{1,65}{2,2} = \frac{3}{4}$

Je compare : $\frac{OI}{OK} = \frac{OJ}{OL}$

Je précise : les points O, I , K et O, J , L sont alignés dans le même ordre.

Je conclus : d'après la réciproque du théorème de Thalès, <u>les droites (IJ) et (KL) sont parallèles</u> . Donc <u>**les deux bras de la pirogue sont parallèles**</u>.

2. ABC est un triangle. Son plus long côté est [AC].

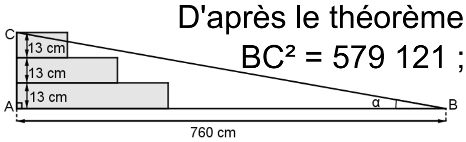
Je calcule : ○ $AC^2 = 25^2 = 625$

○ $BC^2 + AB^2 = 20^2 + 15^2 = 625$

Je compare : $AC^2 = BC^2 + AB^2$

Je conclus : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, <u>le triangle ABC est rectangle en B</u>, donc <u>**la pièce [AB] est perpendiculaire au balancier**</u>.

Exercice 5 ***(3,5 points)*** 1. Le triangle ABC est rectangle en A. Son hypoténuse est [BC].



D'après le théorème de Pythagore, BC² = AB² + AC² ; d'où $BC^2 = 760^2 + (3 \times 13)^2$;

BC² = 579 121 ; BC est une longueur, donc un nombre positif ; $BC = \sqrt{579\ 121}$.

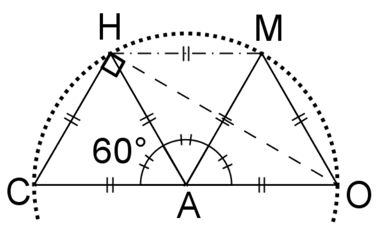
La longueur de la rampe est <u>**BC = 761 cm**</u>.

2. Dans le triangle ABC rectangle en A, $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3 \times 13}{760} = \frac{39}{760}$;

$\left(\text{ou } \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{760}{761} \text{ ; ou encore } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{3 \times 13}{761} = \frac{39}{761} \right)$

d'où $\widehat{ABC} \approx 2,94°$ (valeur arrondie au centième). La longueur de la rampe est supérieure à 2 m (761 cm = 7,61 m); l'angle est bien inférieur à 3° ; donc <u>**la rampe est conforme**</u>.

Exercice 6 ***(4,5 points)*** 1. Figure en vraie grandeur.

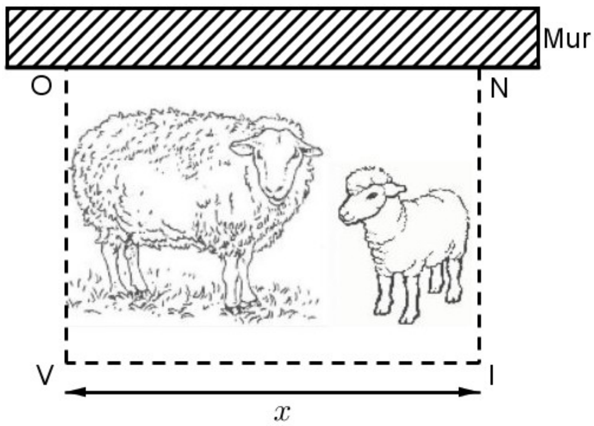


2. Nous avons AC = AH = AM = AO = 6 cm, donc les points C, H, M et O sont sur le <u>**cercle de centre A et de rayon 6 cm**</u>.

3. Le triangle CHO est inscrit dans un cercle dont son côté [CO] est **un** diamètre ; <u>**il est donc rectangle (en H)**</u>.

4. Les triangles CHA et AMO sont équilatéraux, donc $\widehat{CAH} = \widehat{MAO} = 60°$.
De plus les points C, A et O sont alignés,
donc $\widehat{HAM} = 180 - (\widehat{CAH} + \widehat{MAO}) = 180 - (60 + 60) = 60°$.
Le triangle HAM est isocèle (en A), et un de ses angles mesure 60° : il est donc <u>**équilatéral**</u> (ses angles à la base ont la même mesure ; et comme la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, on a : $\widehat{AHM} = \widehat{AMH} = \frac{180 - \widehat{HAM}}{2} = \frac{180 - 60}{2} = 60°$).

Exercice 7 ***(6,5 points)***



Un éleveur a acheté 40 m de grillage. Il veut adosser un enclos rectangulaire OVIN à sa grange, contre un mur de 28 m de long.
Il souhaite offrir ainsi le maximum de place à ses brebis en utilisant le grillage, qu'il dispose sur les trois côtés [OV] , [VI] et [IN].

1. On suppose que VI = 4 m.
   a) VO = (40 − 4) : 2 ; **VO = 18 m** .
   b) Aire de l'enclos
   $\mathcal{A}$ = VO × VI = 4 × 18 ; **$\mathcal{A}$ = 72 m²**

2. Compléter le tableau ci-dessous, sans justifier. *(Répondre sur cette feuille.)*

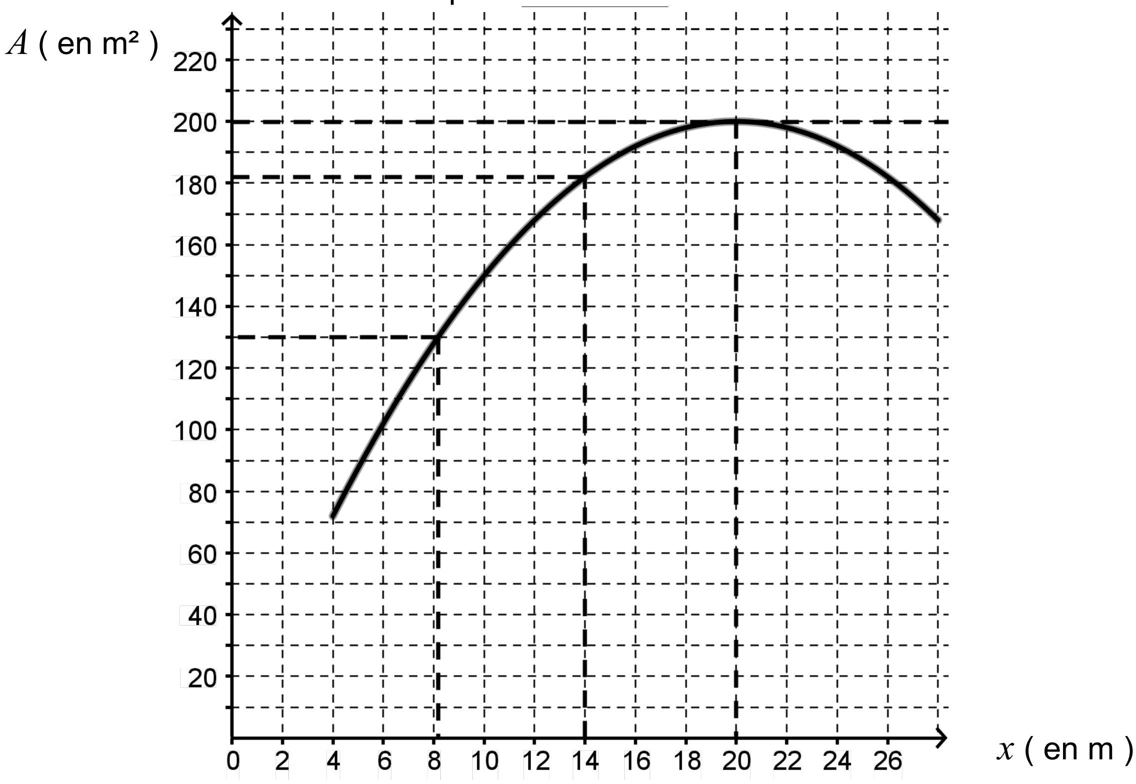
VI (en m)	4	10	20	28
VO (en m)	**18**	**15**	**10**	**6**
$\mathcal{A}$ (en m²)	**72**	**150**	**200**	**168**

3. On pose VI = x ; alors VO = (40 − VI) : 2 = (40 − x) : 2, et
$$\mathcal{A} = \text{VO} \times \text{VI} = \frac{(40 - x) \times x}{2} = \frac{40\,x - x^2}{2} = 20\,x - 0{,}5\,x^2 .$$

4. On peut écrire la formule
   = 20 * A2 − 0,5 * A2 ^ 2
   dans la cellule B2, puis l'étendre sur la colonne B .

	A	B
1	Valeur de x	Valeur de $\mathcal{A}$
2	4	
3	6	
4	8	
5	10	

5. Par lectures graphiques, on a :
   a) Pour x = 14 m, l'aire de l'enclos est d'environ **182 m²**.
   b) L'aire de l'enclos est égale à 130 m² pour $x \approx 8$ m .
   c) L'aire de l'enclos est maximale pour $x \approx 20$ m .



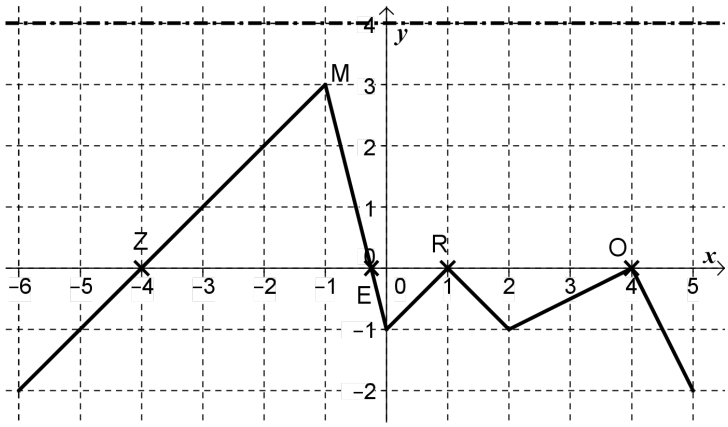
Exercice 8 *(5 points)* Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.
Pour chacune des questions, reporter sur la copie le numéro de la question et la lettre **A**, **B**, ou **C** correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

Doc.1 f est la fonction définie par
$f(x) : x \to -x^2$

Doc.2
Voici le tableau de valeurs d'une fonction g :

x	− 2	− 1	0	1	2
$g(x)$	2	3	− 1	0	− 1

Doc.3 Voici la représentation graphique d'une fonction h définie pour x compris entre − 6 et 5 :



N°	QUESTIONS	A	B	C
1	**(Doc.1)** L'image de −3 par la fonction f est égale à :	− 6	**− 9**	9
2	**(Doc.1)** Par la fonction f, le nombre − 25 admet :	0 antécédent	1 antécédent	**2 antécédents** *(− 5 et 5; non demandé)*
3	**(Doc.1)** On sait que P est un point de la représentation graphique de f. Ses coordonnées peuvent être :	(− 9 ; 3)	(3 ; 9)	**(3 ; − 9)**
4	**(Doc.2)** L'image de −1 par la fonction g est :	**3**	0	2
5	**(Doc.2)** Par la fonction g, le nombre 2 a pour antécédent :	**− 2**	2	− 1
6	**(Doc.3)** Le point M a pour coordonnées :	(3 ; − 1)	**(− 1 ; 3)**	− 1,3
7	**(Doc.3)** L'image de −1 par la fonction h est égale à :	− 5	0	**3** *(c'est l'ordonnée de M)*
8	**(Doc.3)** Par la fonction h, le nombre 0 admet :	0 antécédent	**4 antécédents** $(x_Z ; x_E ; x_R ; x_O)$	4 images
9	**(Doc.3)** Un antécédent du nombre 0 par la fonction h est	− 1	0	**1** *(c'est l'abscisse de R: x_R)*
10	**(Doc.3)** Par la fonction h, le nombre 4	**n'a pas d'antécédent**	a pour antécédent 0	n'a pas d'image