

3^e

Brevet blanc

11 / 02 / 2014

Mathématiques

Éléments de correction

Soin, présentation, orthographe, rédaction : 4 points

Exercice 1 (4 points)

$$1. C(0) = (2 \times 0 - 3)^2 - 4 \times 0 (0 - 3) = (-3)^2 = 9$$

$$C(1,5) = (2 \times 1,5 - 3)^2 - 4 \times 1,5 (1,5 - 3) = 0 - 6 \times (-1,5) = 9$$

$$C\left(\frac{3}{4}\right) = \left(2 \times \frac{3}{4} - 3\right)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - 3\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$2. \text{ On a } C(0) = C(1,5) = C\left(\frac{3}{4}\right) = 9 ;$$

on conjecture que $C(x) = 9$ pour tout nombre x .

$$3. C(x) = (2x - 3)^2 - 4x(x - 3)$$

$$C(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 9 - 4x \times x + 4x \times 3$$

$$C(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x$$

$C(x) = 9$ pour tout nombre x .

Remarque. L'égalité **conjecturée** en 2. est maintenant **démontrée**.

4. On pose :

$$N = 1\,999\,999\,999\,999\,997^2 - 4\,000\,000\,000\,000\,000 \times 999\,999\,999\,999\,997$$

a) On remarque que $N = C(1\,000\,000\,000\,000\,000)$

b) Comme $C(x) = 9$ pour tout nombre x , on a **$N = 9$** .

Remarque. *En limite de capacité, certaines calculatrices ne donnent pas le bon résultat.*

Exercice 2 (5 points)

1. Le volume intérieur de la caisse est $V = \ell \times L \times h$.

$$V = 105 \times 165 \times 105 ; \underline{V = 1\ 819\ 125\ \text{cm}^3}$$

2. On peut placer :

- $\ell : 5 = 105 : 5 = 21$ boîtes en largeur ;
- $L : 5 = 165 : 5 = 33$ boîtes en longueur ;
- $h : 5 = 105 : 5 = 21$ boîtes en hauteur.

Donc le nombre maximal de boîtes cubiques de côté 5 cm est $21 \times 33 \times 21 = \underline{14\ 553}$.

3. a) Les boîtes sont cubiques, identiques et remplissent entièrement la caisse :

leur arête doit diviser la longueur, la largeur et la hauteur :
c'est un diviseur commun à 105 et 165.

On les veut les plus grandes possibles :
on cherche le PGCD de 105 et 165.

Calcul du PGCD des nombres 105 et 165

• méthode 1 : avec les listes de diviseurs

- ♦ diviseurs de 105: 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 ; 105
- ♦ diviseurs de 165: 1 ; 3 ; 5 ; 11 ; 15 ; 33 ; 55 ; 165
- ♦ diviseurs communs à 105 et 165: 1 ; 3 ; 5 ; 15 ;
d'où : PGCD (105 ; 165) = 15

• méthode 2 : avec l'algorithme d'Euclide

Si r est le reste non nul de la division euclidienne de a par b ,
alors $\text{PGCD} (a ; b) = \text{PGCD} (b ; r)$.

$$165 = 105 \times 1 + 60 , \text{ donc } \text{PGCD} (165 ; 105) = \text{PGCD} (105 ; 60)$$

$$105 = 60 \times 1 + 45 , \text{ donc } \text{PGCD} (105 ; 60) = \text{PGCD} (60 ; 45)$$

$$60 = 45 \times 1 + 15 , \text{ donc } \text{PGCD} (60 ; 45) = \text{PGCD} (45 ; 15)$$

$$45 = 15 \times 3 + 0 , \text{ donc } \text{PGCD} (45 ; 15) = 15$$

$$\text{d'où : } \underline{\text{PGCD} (165 ; 105) = 15}$$

• méthode 3 : avec les décompositions en produits de nombres premiers :

$$105 = 3 \times 5 \times 7 \text{ et } 165 = 3 \times 5 \times 11 ;$$

$$\text{donc } \text{PGCD} (105 ; 165) = 3 \times 5 ; \underline{\text{PGCD} (165 ; 105) = 15}$$

L'arête des boîtes est donc de 15 cm.

b) Le nombre maximal de boîtes est alors :

$$N = (\ell : 5)(L : 5)(h : 5)$$

$$N = (105 : 15)(165 : 15)(105 : 15) ;$$

$$N = 7 \times 11 \times 7 ;$$

$$N = 539$$

On peut placer au maximum **539 boîtes cubiques d'arêtes 15 cm.**

Exercice 3 (2,5 points) Les triangles CDG et ABG sont déterminés par :

- * les droites (AD) et (BC) **sécantes** en G
- * les droites **parallèles** (AB) et (CD) .



D'après le théorème de Thalès, les longueurs des côtés

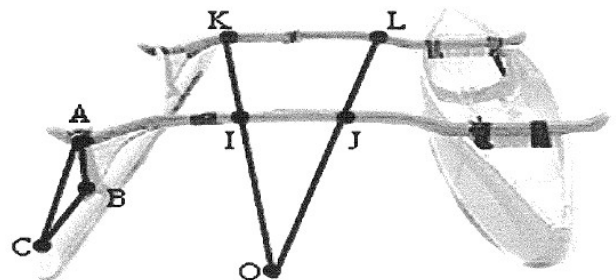
des triangles sont proportionnelles : $\frac{GC}{GB} = \frac{GD}{GA} = \frac{CD}{AB}$.

Je remplace : $\frac{30}{45} = \frac{30}{45} = \frac{CD}{51}$;

d'où $\frac{30}{45} = \frac{CD}{51}$; et $CD = 51 \times \frac{30}{45}$; **CD = 34 cm**

Exercice 4 (5 points) 1. Les triangles OIJ et OKL sont déterminés par :

- les droites (IK) et (JL) sécantes en O ;
- les droites (IJ) et (KL)



Je calcule : $\frac{OI}{OK} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$

$$\frac{OJ}{OL} = \frac{1,65}{2,2} = \frac{3}{4}$$

Je compare : $\frac{OI}{OK} = \frac{OJ}{OL}$

Je précise : les points O, I , K et O, J , L sont alignés dans le même ordre.

Je conclus : d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles .

Donc les deux bras de la pirogue sont parallèles.

2. ABC est un triangle. Son plus long côté est [AC].

Je calcule : $\circ AC^2 = 25^2 = 625$

$\circ BC^2 + AB^2 = 20^2 + 15^2 = 625$

Je compare : $AC^2 = BC^2 + AB^2$

Je conclus : d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

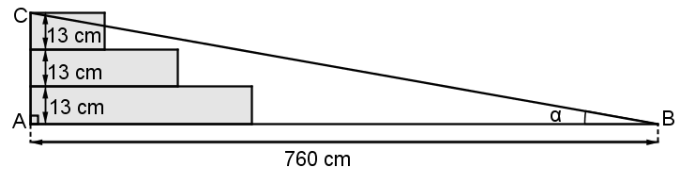
le triangle ABC est rectangle en B,

donc **la pièce [AB] est perpendiculaire au balancier.**

Exercice 5 (3,5 points)

1. Le triangle ABC est rectangle en A.

Son hypoténuse est [BC].



D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$;

d'où $BC^2 = 760^2 + (3 \times 13)^2$;

$BC^2 = 579\,121$; BC est une longueur, donc un nombre positif ;

$BC = \sqrt{579\,121}$.

La longueur de la rampe est **BC = 761 cm.**

2. Dans le triangle ABC rectangle en A, $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3 \times 13}{760} = \frac{39}{760}$;

$\left(\text{ou } \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{760}{761} ; \text{ ou encore } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{3 \times 13}{761} = \frac{39}{761} \right)$

d'où $\widehat{ABC} \approx 2,94^\circ$ (valeur arrondie au centième).

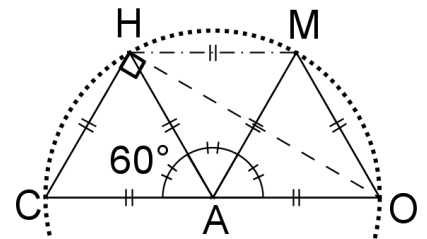
La longueur de la rampe est supérieure à 2 m (761 cm = 7,61 m) ;

l'angle est bien inférieur à 3° ;

donc **la rampe est conforme.**

Exercice 6 (4,5 points) 1. Figure en vraie grandeur.

2. Nous avons $AC = AH = AM = AO = 6$ cm, donc les points C, H, M et O sont sur le cercle de centre A et de rayon 6 cm.



3. Le triangle CHO est inscrit dans un cercle dont son côté [CO] est un diamètre ; il est donc rectangle (en H).

4. Les triangles CHA et AMO sont équilatéraux, donc $\widehat{CAH} = \widehat{MAO} = 60^\circ$. De plus les points C, A et O sont alignés,

$$\text{donc } \widehat{HAM} = 180 - (\widehat{CAH} + \widehat{MAO}) = 180 - (60 + 60) = 60^\circ.$$

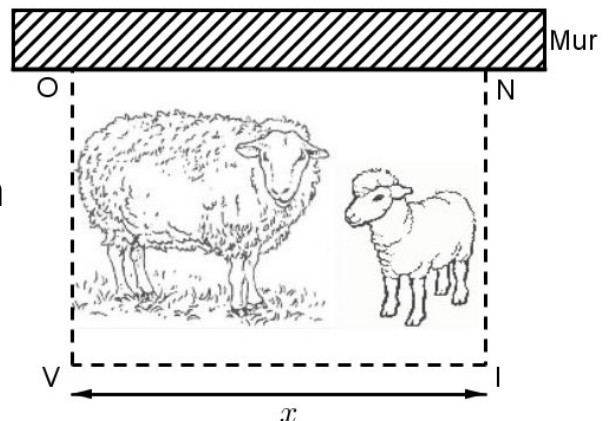
Le triangle HAM est isocèle (en A), et un de ses angles mesure 60° : il est donc équilatéral (ses angles à la base ont la même mesure ; et comme la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° ,

$$\text{on a : } \widehat{AHM} = \widehat{AMH} = \frac{180 - \widehat{HAM}}{2} = \frac{180 - 60}{2} = 60^\circ).$$

Exercice 7 (6,5 points)

Un éleveur a acheté 40 m de grillage. Il veut adosser un enclos rectangulaire OVIN à sa grange, contre un mur de 28 m de long.

Il souhaite offrir ainsi le maximum de place à ses brebis en utilisant le grillage, qu'il dispose sur les trois côtés [OV], [VI] et [IN].



1. On suppose que $VI = 4$ m.

a) $VO = (40 - 4) : 2$; **$VO = 18$ m** .

b) Aire de l'enclos

$$A = VO \times VI = 4 \times 18$$
 ; **$A = 72$ m²**

2. Compléter le tableau ci-dessous, sans justifier.
(Répondre sur cette feuille.)

VI (en m)	4	10	20	28
VO (en m)	18	15	10	6
A (en m ²)	72	150	200	168

3. On pose $VI = x$;

$$\text{alors } VO = (40 - VI) : 2 = (40 - x) : 2,$$

$$\text{et } A = VO \times VI = \frac{(40 - x) \times x}{2} = \frac{40x - x^2}{2} = 20x - 0,5x^2.$$

4. On peut écrire la formule

$$= 20 * A2 - 0,5 * A2 ^ 2$$

dans la cellule B2,

puis l'étendre sur la colonne B .

	A	B
1	Valeur de x	Valeur de A
2	4	
3	6	
4	8	
5	10	

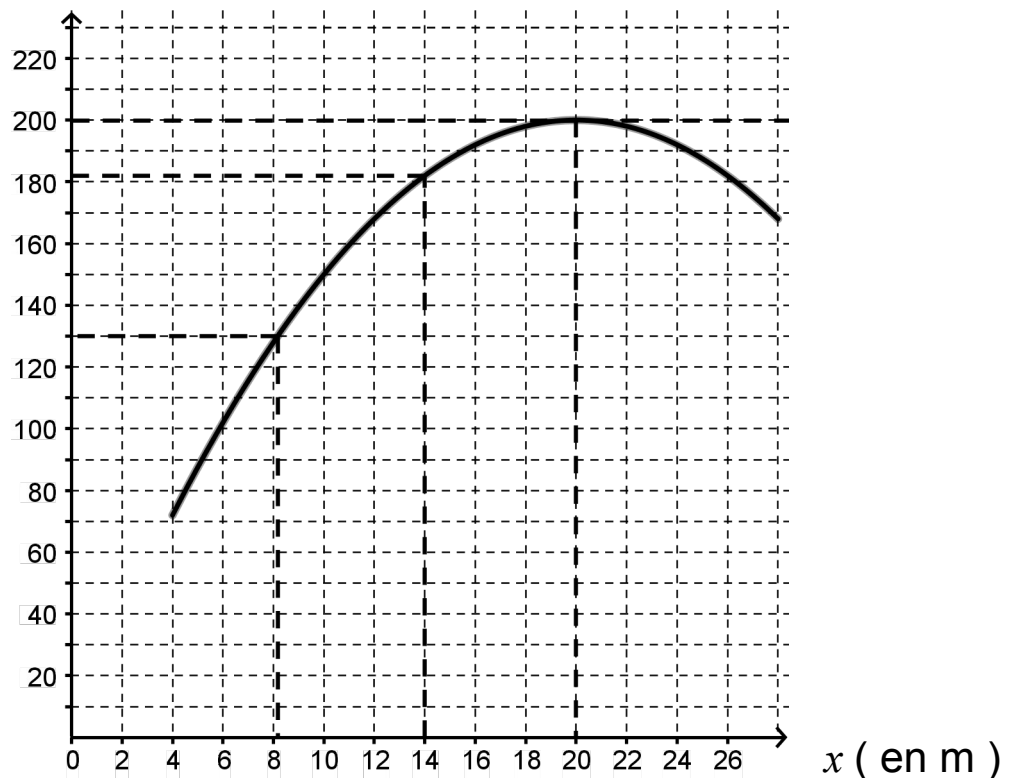
5. Par lectures graphiques, on a :

a) Pour $x = 14$ m, l'aire de l'enclos est d'environ **182 m²**.

b) L'aire de l'enclos est égale à 130 m² pour $x \approx 8$ m .

c) L'aire de l'enclos est maximale pour $x \approx 20$ m .

A (en m²)



Exercice 8 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées ;
une seule est exacte.

Pour chacune des questions, reporter sur la copie le numéro de la question et la lettre **A**, **B**, ou **C** correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

Doc.1 f est la fonction définie par

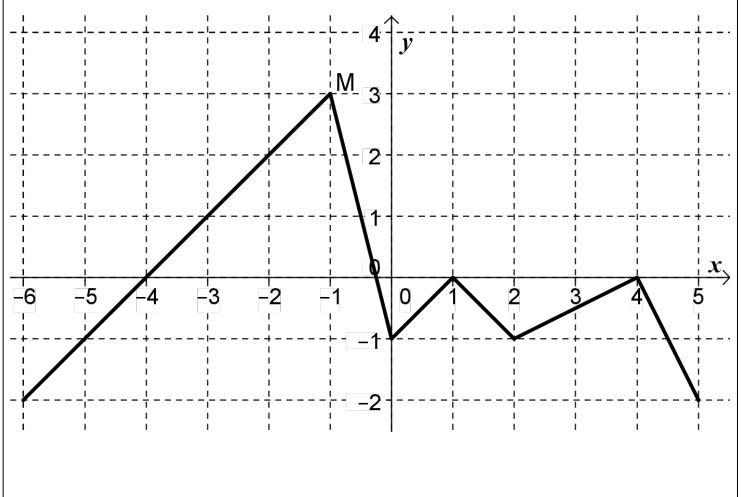
$$f(x) : x \rightarrow -x^2$$

Doc.2

Voici le tableau de valeurs d'une fonction g :

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	2	3	-1	0	-1

Doc.3 Voici la représentation graphique d'une fonction h définie pour x compris entre -6 et 5 :



N°	QUESTIONS	A	B	C
1	(Doc.1) L'image de -3 par la fonction f est égale à :	- 6	<u>- 9</u>	9
2	(Doc.1) Par la fonction f , le nombre - 25 admet :	0 antécédent	1 antécédent	2 antécédents (- 5 et 5; non demandé)
3	(Doc.1) On sait que P est un point de la représentation graphique de f . Ses coordonnées peuvent être :	(- 9 ; 3)	(3 ; 9)	(<u>3 ; - 9</u>)
4	(Doc.2) L'image de -1 par la fonction g est :	<u>3</u>	0	2
5	(Doc.2) Par la fonction g , le nombre 2 a pour antécédent :	<u>- 2</u>	2	- 1
6	(Doc.3) Le point M a pour coordonnées :	(3 ; - 1)	(<u>- 1 ; 3</u>)	- 1,3
7	(Doc.3) L'image de -1 par la fonction h est égale à :	- 5	0	<u>3</u> (c'est l'ordonnée de M)
8	(Doc.3) Par la fonction h , le nombre 0 admet :	0 antécédent	<u>4</u> antécédents ($x_Z ; x_E ; x_R ; x_O$)	4 images
9	(Doc.3) Un antécédent du nombre 0 par la fonction h est	- 1	0	<u>1</u> (c'est l'abscisse de R: x_R)
10	(Doc.3) Par la fonction h , le nombre 4	n'a pas d'antécédent	a pour antécédent 0	n'a pas d'image