Olympiades académiques de mathématiques de quatrième. Jeudi 3 avril 2008.
Eléments de résolution.

Collège Les Hauts Grillets. Saint-Germain-en-Laye

Préambule.

Le premier exercice est relativement simple : après une bonne lecture de l'énoncé, on trouve facilement la réponse.
Les exercices suivants sont de beaux exercices de recherche : là, il ne faut pas hésiter à partir « à l'aventure », suivre des pistes – des idées – , sans forcément savoir d'avance où l'on va arriver. Comme l'écrivait si bien Antonio Machado, poète espagnol :

« Caminante, no hay camino, el camino se hace al andar »

[Toi qui chemines, il n'y a pas de chemin, le chemin se fait en marchant] ...

Exercice numéro 1. Ils courent, ils courent...

Enoncé.

Dans une course de 2 000 m, A finit 200 m avant B et 290 m avant C. Si B et C continuent à la même vitesse, où sera C quand B passera la ligne d'arrivée ?

Exercice numéro 2. La bonne mesure.

Attention : à l'impression les mesures peuvent être légèrement inexactes.

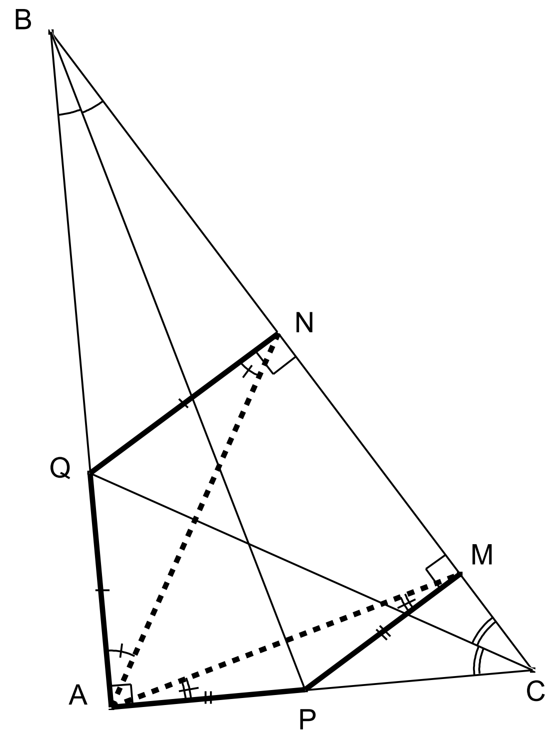
Enoncé.

Soit ABC un triangle rectangle en A. Les bissectrices de ce triangle issues de B et C coupent respectivement $[AC]$ en P et $[AB]$ en Q. Les perpendiculaires abaissées de P et Q sur $[BC]$ coupent $[BC]$ respectivement en M et N. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$?

Etude.

Une ou plusieurs figures précises laissent penser que $\widehat{MAN} = 45°$.
Dans d'autres conditions qu'un concours, une construction avec un logiciel de géométrie conduit à la même conjecture.
Il reste ensuite à la prouver ... Les méthodes ne manquent pas, en voici quelques-unes.
Le principe en sera toujours le même : sans savoir dès le départ où cela va nous mener, nous enchaînerons les observations, nées d'une figure **bien codée**.

Une première solution, utilisant la propriété d'équidistance des points d'une bissectrice aux côtés de son angle et des jeux avec des mesures d'angles, la somme des mesures des angles dans un triangle, l'égalité des mesures des angles à la base des triangles isocèles.



L'angle qui nous intéresse, $\widehat{MAN}$, est un angle du triangle MAN.
Donc $\widehat{MAN} = 180° - (\widehat{ANM} + \widehat{AMN})$.

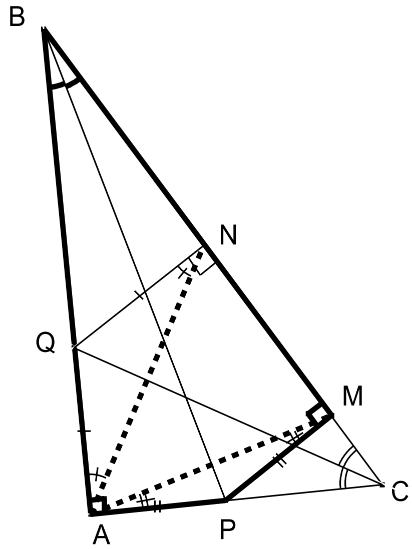
Que savons-nous des angles $\widehat{ANM}$ et $\widehat{AMN}$?
Regardons la figure, codée d'après l'énoncé :
$\widehat{ANM} = 90° - \widehat{QNA}$
et $\widehat{AMN} = 90° - \widehat{AMP}$.
Reportons et simplifions :
$\widehat{MAN} = 180° - (90° - \widehat{QNA} + 90° - \widehat{AMP})$
$\widehat{MAN} = 180° - 90° + \widehat{QNA} - 90° + \widehat{AMP}$
$\widehat{MAN} = \widehat{QNA} + \widehat{AMP}$

Que savons-nous des angles $\widehat{QNA}$ et $\widehat{AMP}$?
La figure, que nous avons bien codée grâce à nos connaissances, nous indique que ce sont les angles à la base de deux triangles isocèles.
En effet, Q est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$. Or si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est à la même distance des deux côtés de cet angle. Donc Q est à la même distance de (CA) et de (CB).
Comme $(QA)\perp(AC)$, la distance du point Q à (CA) est QA; de même, comme $(QN)\perp(BC)$, la distance du point Q à (CB) est QN. Donc QA = QN : le triangle QAN est isocèle en Q.
Ses angles à la base ont donc la même mesure : $\widehat{QNA} = \widehat{QAN}$.
De même nous avons : $\widehat{AMP} = \widehat{PAM}$ car P est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, et alors $\widehat{MAN} = \widehat{QAN} + \widehat{PAM}$.

Que savons-nous de la somme $\widehat{QAN} + \widehat{PAM}$? Il suffit de regarder la figure bien codée :
$\widehat{QAN} + \widehat{PAM} = 90° - \widehat{MAN}$. Nous arrivons à : $\widehat{MAN} = 90° - \widehat{MAN}$; et $\widehat{MAN} = 45°$.

Remarque. Notre point de départ aurait pu être : l'angle qui nous intéresse, $\widehat{MAN}$, est complémentaire avec les angles $\widehat{PAM}$ et $\widehat{NAQ}$: $\widehat{PAM} + \widehat{MAN} + \widehat{NAQ} = 90°$.
Ensuite le travail est le même, mais « dans l'autre sens ».
Ce point de départ, écrit un peu différemment, nous conduit à une autre démonstration ...

Une autre solution, utilisant la définition de la bissectrice d'un angle et le cosinus (ou la propriété d'équidistance des points d'une bissectrice aux côtés de son angle et le théorème de Pythagore), des jeux avec des mesures d'angles (écritures, calculs dans des triangles isocèles et rectangle).



Point de départ : $\widehat{CAM} + \widehat{MAN} + \widehat{NAB} = 90°$

- Que savons-nous de l'angle $\widehat{CAM}$?

La figure nous indique : $\widehat{CAM} = 90° - \widehat{MAB}$.

- Que savons-nous de l'angle $\widehat{MAB}$?

C'est un angle du triangle MAB. Ce triangle semble être isocèle en B. Pour le démontrer, il faut réussir à montrer que BA = BM.
Une figure bien codée nous donne deux idées de preuve. En effet, [BA] et [BM] sont les côtés de deux triangles rectangles (ABP et MBP) qui ont des mesures communes.

(Preuve 1) - Dans le triangle ABP rectangle en A :

$$\cos \widehat{ABP} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$\cos \widehat{ABP} = \dfrac{BA}{BP}$; d'où $BA = BP \times \cos \widehat{ABP}$

- De même, dans le triangle MBP rectangle en M, on a : $BM = BP \times \cos \widehat{PBM}$
- (BP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABM}$, donc $\widehat{ABP} = \widehat{PBM}$; d'où BA = BM.

Ou : *(Preuve 2)* - (BP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Or si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.
Donc PA = PM (car $(PA) \perp (BA)$ et $(PM) \perp (BC)$).

- Dans le triangle ABP rectangle en A, d'après la propriété de Pythagore : $BA = \sqrt{BP^2 - PA^2}$
- De même dans le triangle MBP rectangle en M : $BM = \sqrt{BP^2 - PM^2}$.
  Comme PA = PM, nous avons bien : BA = BM.

Dans les deux cas, nous avons bien montré : le triangle ABM est isocèle en B.
Donc l'angle à la base $\widehat{MAB}$ mesure $\dfrac{180° - \widehat{ABM}}{2}$, $\widehat{MAB} = 90° - \dfrac{\widehat{ABM}}{2}$.

- Reportons ce résultat dans l'expression du début : $\widehat{CAM} = 90° - \left(90° - \dfrac{\widehat{ABM}}{2}\right)$;

$$\widehat{CAM} = 90° - 90° + \frac{\widehat{ABM}}{2} = \frac{\widehat{ABM}}{2} .$$

- De même, en travaillant dans les triangles rectangles ACQ et QCN, nous montrons

que le triangle ACN est isocèle en C, puis nous obtenons : $\widehat{NAB} = \dfrac{\widehat{ACN}}{2}$

- Reprenons l'égalité du début : $\widehat{CAM} + \widehat{MAN} + \widehat{NAB} = 90°$, et remplaçons :

$\dfrac{\widehat{ABM}}{2} + \widehat{MAN} + \dfrac{\widehat{ACN}}{2} = 90°$. Or le triangle ABC est rectangle, ses angles aigus sont donc complémentaires : $\widehat{ABM} + \widehat{ACN} = 90°$, et $\dfrac{\widehat{ABM}}{2} + \dfrac{\widehat{ACN}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

D'où: $\widehat{MAN} + 45° = 90°$; $\widehat{MAN} = 45°$.

Une nouvelle solution ,utilisant les droites remarquables du triangle isocèle, la définition de la bissectrice d'un angle et le cosinus (ou la propriété d'équidistance des points d'une bissectrice aux côtés de son angle et le théorème de Pythagore), des jeux avec des mesures d'angles (écritures, calculs dans des triangles rectangles).

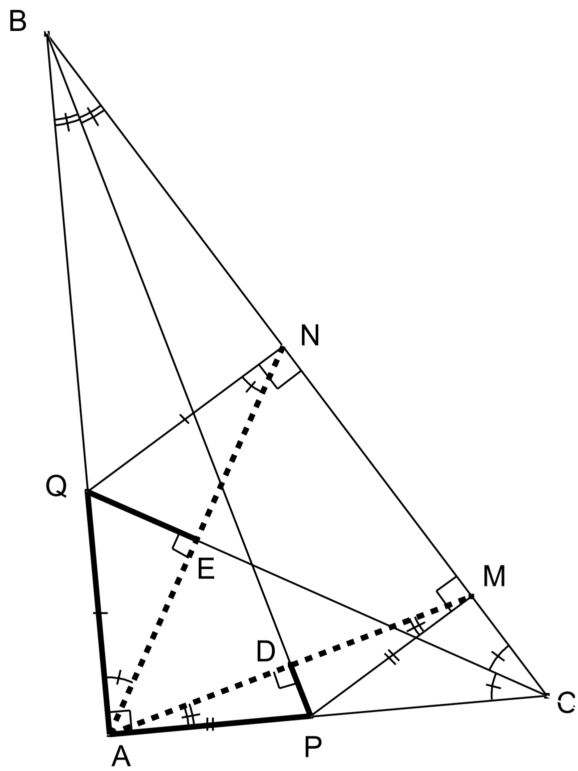
On remarque cette fois que (BP), bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, est la médiatrice du segment [AM].

(Pour le prouver, une fois montré comme dans la solution précédente que le triangle ABM est isocèle en B, on conclut en rappelant que la bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isocèle est aussi médiatrice de la base.)

Nommons D le point d'intersection de (BP) et [AM]. Nous remarquons alors que l'angle $\widehat{APB}$ (que l'on peut aussi noter $\widehat{APD}$), est un angle de deux triangles rectangles :

- dans le triangle ABP rectangle en A, $\widehat{ABP}$ et $\widehat{APB}$ sont complémentaires.
- dans le triangle ADP rectangle en D, $\widehat{MAC}$ et $\widehat{APB}$ sont complémentaires.

Nous en déduisons : $\widehat{MAC} = \widehat{ABP}$.



Faisons la même étude « de l'autre côté » :
(CQ), bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, est la médiatrice du segment [AN].
Nommons E le point d'intersection de (CQ) et [AN].

- Dans le triangle AQC rectangle en A, $\widehat{AQC}$ et $\widehat{ACQ}$ sont complémentaires.
- Dans le triangle AEQ rectangle en E, $\widehat{AQC}$ et $\widehat{BAN}$ sont complémentaires.

Nous en déduisons : $\widehat{ACQ} = \widehat{BAN}$.

Dans le triangle ABC rectangle en A, $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$,

donc $2 \times \widehat{ABP} + 2 \times \widehat{ACQ} = 90°$, et $\widehat{ABP} + \widehat{ACQ} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

$\widehat{BAC} = 90°$ et $\widehat{BAC} = \widehat{BAN} + \widehat{NAM} + \widehat{MAC}$, donc $90° = \widehat{ACQ} + \widehat{NAM} + \widehat{ABP}$.

D'où $90° = 45° + \widehat{NAM}$.

$\widehat{NAM} = 90° - 45°$

$\widehat{NAM} = 45°$

Remarque. Là aussi, nous pouvons « suivre le fil » dans l'autre sens :

- partir comme précédemment de l'angle droit $\widehat{BAC}$, mais cette fois-ci noter, après avoir « vu » et codé les angles droits en D et E : $\widehat{BAC} = \widehat{QAE} + \widehat{NAM} + \widehat{DAP}$.
- On remarque alors que l'angle $\widehat{AQC}$ se retrouve dans deux triangles rectangles (AQC et AQE), donc que les deux autres angles aigus ont même mesure : $\widehat{QAE} = \widehat{ACQ}$
- Puis on remplace $\widehat{ACQ}$ par $\dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ etc ...

Exercice numéro 3. Le bon motif.

Enoncé.

Si on effectue le quotient de 1 par certains entiers, on fait apparaître des suites de décimales dans lesquels des motifs se répètent. Par exemple :

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ (le motif 3 se répète),

$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142857\ldots$ (le motif 142857 se répète)

$\frac{1}{37} = 0{,}027\ 027\ 027\ldots$ (le motif 027 se répète)

1. Ces motifs sont plus ou moins longs. Quel motif obtient-on pour $\frac{1}{41}$? pour $\frac{1}{13}$?

2. Le motif obtenu pour le nombre $\frac{1}{97}$ possède 96 chiffres ; on ne demande pas de le calculer.
Ce motif commence par 01030927... . Quels sont ses trois derniers chiffres ?

Etude.

1. En posant les divisions (ou avec la calculatrice, mais attention c'est risqué car son affichage est limité !), nous trouvons :

- $\frac{1}{41} = 0{,}02439\ 02439\ 02439\ldots$: le motif est 02439 ;
- $\frac{1}{13} = 0{,}076923\ 076923\ 076923\ldots$: le motif est 076923.

2. <u>Une première méthode</u>. Si l'on n'a pas peur des calculs, on pose les divisions : c'est plus sûr, et ça peut peut-être donner des idées !

$$\begin{array}{l|l}
1,\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots & 41 \\ \cline{2-2}
1\ \mathbf{0}\ \mathbf{0} & 0{,}02439\ 02\ldots \\
\quad 1\ 8\ \mathbf{0} & \\
\qquad 1\ 6\ \mathbf{0} & \\
\qquad\quad 3\ 7\ \mathbf{0} & \\
\qquad\qquad\quad 1\ \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \ldots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
1,\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots & 13 \\ \cline{2-2}
1\ \mathbf{0}\ \mathbf{0} & 0{,}076923\ 07\ldots \\
\qquad 9\ \mathbf{0} & \\
\qquad 1\ 2\ \mathbf{0} & \\
\qquad\qquad\quad 3\ \mathbf{0} & \\
\qquad\qquad\qquad 4\ \mathbf{0} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1\ \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots &
\end{array}$$

Le motif est trouvé dès que 1 réapparaît dans les restes : en observant bien, on voit qu'alors les calculs vont se poursuivre de la même façon indéfiniment, que l'on retrouvera sans cesse la même série de restes et le même motif dans le quotient ...

Comment trouver alors les trois derniers chiffres du motif de $\frac{1}{97}$?
Il suffit de « remonter » le calcul :

on veut obtenir un reste égal à 1, à partir d'un nombre se terminant par le zéro « abaissé »

$$\begin{array}{r|l}
1,\ \ 0\ \ \ 0\ \ \dots\ 0\ \ 0\ \dots & 97 \\ \cline{2-2}
\vdots\ \ \ \vdots\qquad\qquad & 0,\underbrace{01030927\dots cdu}_{96\text{ chiffres}}\dots \\
?\ \ ?\ \ \mathbf{0}\ \ \ \ \ & \\
1\ \dots &
\end{array}$$

L'unique possibilité est que u, chiffre des **u**nités du motif, soit égal à 7 ($7 \times 7 = 49$, et 49 + 1 = 5**0** qui se termine bien par **0**).

Calculons alors le reste qui précède le reste 1 : c'est $7 \times 97 + 1 = 680$, et complétons :

$$\begin{array}{r|l}
1,\ \ 0\ \ \ 0\ \ \dots\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots & 97 \\ \cline{2-2}
\vdots\ \ \ \vdots\qquad\qquad\qquad\qquad & 0,\underbrace{01030927\dots cd7}_{96\text{ chiffres}}\dots \\
?\ \ ?\ \ \mathbf{0}\qquad\ \ \ & \\
6\ \ 8\ \ \mathbf{0}\ \ \ \ \ & \\
1\ \dots &
\end{array}$$

Comment maintenant trouver un reste se terminant par 8 ?

L'unique possibilité est que d, chiffre des **d**izaines du motif, soit égal à 6.

Calculons le reste qui précède le reste 68 : c'est $6 \times 97 + 68 = 650$. Complétons encore :

$$\begin{array}{r|l}
1,\ \ 0\ \ \ 0\ \ \dots\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots & 97 \\ \cline{2-2}
\vdots\ \ \ \vdots\qquad\qquad\qquad\qquad & 0,\underbrace{01030927\dots c67}_{96\text{ chiffres}}\dots \\
?\ \ \mathbf{0}\qquad\qquad\ \ & \\
6\ \ 5\ \ \mathbf{0}\qquad\ \ \ & \\
6\ \ 8\ \ \mathbf{0}\ \ \ \ \ & \\
1\ \dots &
\end{array}$$

Comment trouver un reste se terminant par 5 ?

L'unique possibilité est que c, chiffre des **c**entaines du motif, soit égal à 5.

Le motif de $\frac{1}{97}$ se termine par 567.

<u>Une autre méthode</u>.

Nous avons : $\frac{1}{97} = 0,\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\dots$.

Pour y voir plus clair, essayons de faire apparaître le motif **devant** la virgule. Il suffit de décaler la virgule de 96 rangs : c'est facile en multipliant par 10^{96} .

Nous obtenons : $10^{96} \times \frac{1}{97} = \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ ,\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\dots$.

Nous remarquons que :

$$\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ ,\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\dots = \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres} + 0\ ,\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\dots$$

Comme le motif se répète à l'infini : $\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ ,\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\ \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}\dots = \underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres} + \frac{1}{97}$

Donc $10^{96}\times\frac{1}{97}=\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}+\frac{1}{97}$, c'est-à-dire $1\underbrace{000\ 000...000}_{96\ zéros}\times\frac{1}{97}=\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}+\frac{1}{97}$,

ou encore $\underbrace{999\ 999...999}_{96\ neufs}\times\frac{1}{97}=\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}$. Alors $\frac{\overbrace{999\ 999...999}^{96\ neufs}}{97}=\underbrace{m\ o\ t\ i\ f}_{96\ chiffres}$.

Le motif est donc le nombre (de 96 chiffres) dont le produit avec 97 est $\underbrace{999\ 999...999}_{96\ neufs}$.

Ce motif est de la forme : $\underbrace{01030927...\mathrm{cdu}}_{96\ chiffres}$ (en notant c le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités).

Posons la multiplication.
Pour que le chiffre des unités du résultat final soit bien un 9, il faut ajouter 9 au 0 de « décalage » de la deuxième ligne.

$$\begin{array}{lr}
 & 0\ 1\ 0\ 3\ 0\ 9\ 2\ 7\ .\ .\ .\ \mathrm{c}\ \mathrm{d}\ \mathrm{u} \\
\times & 9\ 7 \\
\hline
 & .\ .\ .\ 6\ 9 \\
+ & .\ .\ .\ 3\ 0 \\
\hline
 & 9\ 9\ 9\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 9\ 9\ 9\ 9
\end{array}$$

← Pour avoir un 9 ici, il faut u = 7 (dans la «table» de 7, seul 7×7 se termine par 9) .

Alors à la 2ème ligne, on a $9\times7=63$; posons le 3. Pour avoir une somme de 9, il faut lui ajouter 6 : le chiffre des dizaines de la 1ère ligne est 6.

Pour trouver d, reprenons la première ligne; comme u = 7 et $7\times7=49$, nous avons une retenue de 4.
$7\times\mathrm{d}+4$ doit se terminer par 6, donc $7\times\mathrm{d}$ doit se terminer par 2.
Dans la « table de multiplication » de 7, on ne trouve que 42; donc d = 6.

$$\begin{array}{lr}
 & 0\ 1\ 0\ 3\ 0\ 9\ 2\ 7\ .\ .\ .\ \mathrm{c}\ 6\ 7 \\
\times & 9\ 7 \\
\hline
 & .\ .\ 9\ 6\ 9 \\
+ & .\ .\ 0\ 3\ 0 \\
\hline
 & 9\ 9\ 9\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 9\ 9\ 9\ 9
\end{array}$$

← Reprenons le calcul : $9\times7=63$, le 3 est posé, nous retenons 6.
$9\times6=54$, avec la retenue nous posons 0.

← Pour avoir une somme de 9, il faut ajouter 9 au 0 : le chiffre des centaines de la 1ère ligne est 9.

Reprenons alors le calcul de la première ligne.
Nous arrivons à $7\times c+4$, qui doit donc se terminer par 9; c'est-à-dire que $7\times c$ doit se terminer par 5. Dans la « table » de 7, seul 35 convient : c = 5.

Le motif de $\frac{1}{97}$ se termine par 567.

Exercice numéro 4. Et à la fin, que reste-t-il ?

Enoncé.

On écrit la liste des cent nombres : $1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ \frac{1}{98}\ ,\ \frac{1}{99}\ ,\ \frac{1}{100}\ ,$ à laquelle on applique le procédé suivant : on choisit des nombres *a* et *b* dans la liste et on les remplace par le seul *a*+*b*+*ab*, puis on continue de même. À chaque étape, l'effectif perd une unité. À la fin, on ne peut plus continuer, il n'y a qu'un nombre.

1. Si on procède systématiquement et en commençant par la gauche :
   a. Quelle liste obtient-on après la première étape ? Après la deuxième ?
   b. Quel nombre obtient-on après les 99 étapes ?
2. Et si on commence par la droite ?
3. Si on procède au hasard, quels résultats peut-on obtenir ?

Etude.

Le principe est simple : nous avons une liste de nombres ; dans cette liste, nous **enlevons** deux nombres, nous effectuons un petit calcul avec ces deux nombres, et nous **ajoutons** le résultat à la liste. A chaque étape, nous remplaçons **deux** nombres par **un seul** nombre: à la fin, il n'y a plus qu'un nombre. Ce nombre dépend-il de l'ordre que l'on a choisi ?

1. Procédons systématiquement de gauche à droite :

a. On remplace 1 et $\frac{1}{2}$ par $1+\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$.

La nouvelle liste est : $2\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ \frac{1}{98}\ ,\ \frac{1}{99}\ ,\ \frac{1}{100}$.

Poursuivons : 2 et $\frac{1}{3}$ sont remplacés par $2+\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=2+1=3$.

La nouvelle liste est : $3\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ \frac{1}{98}\ ,\ \frac{1}{99}\ ,\ \frac{1}{100}$.

b. On constate qu'en commençant par la gauche :

- la liste de deux nombres : $1\ ,\ \frac{1}{2}$ est remplacée par 2 ;
- la liste de trois nombres : $1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}$ est remplacée par 3 ;
- et ainsi de suite : à la fin, **la liste de cent nombres est remplacée par 100.**

2. Procédons maintenant systématiquement de droite à gauche :

a. On remplace $\frac{1}{99}$ et $\frac{1}{100}$ par

$$\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{99}\times\frac{1}{100}=\frac{1\times100}{99\times100}+\frac{1\times99}{100\times99}+\frac{1\times1}{99\times100}=\frac{100+99+1}{99\times100}=\frac{2\times100}{99\times100}=\frac{2}{99}\ .$$

La nouvelle liste est : $1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ \frac{1}{98}\ ,\ \frac{2}{99}$.

Poursuivons : $\frac{1}{98}$ et $\frac{2}{99}$ sont remplacés par

$$\frac{1}{98}+\frac{2}{99}+\frac{1}{98}\times\frac{2}{99}=\frac{99+2\times98+1\times2}{98\times99}=\frac{297}{98\times99}=\frac{3\times99}{98\times99}=\frac{3}{98}\ .$$

La nouvelle liste est : $1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ \frac{1}{97}\ ,\ \frac{3}{98}$.

b. On constate qu'en commençant par la gauche :

- la liste de deux nombres : $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{100}$ est remplacée par : $\frac{2}{99}$;
- la liste de trois nombres : $\frac{1}{98}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{100}$ est remplacée par : $\frac{3}{98}$;
- et ainsi de suite : à la fin la liste des cent nombres : $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{100}$

est remplacée par $\frac{100}{1} = 100$.

Après les 99 étapes, nous obtenons à nouveau 100.

3. La question du hasard ...

- Prenons une liste de trois nombres quelconques que nous noterons a ; b ; c .

Commençons par la gauche :

→ a ; b ; c

→ $a + b + ab$; c

→ $(a+b+ab)+c+(a+b+ab)\times c = a+b+ab+c+ac+bc+abc$ (on développe)

$= a+b+c+ab+ac+bc+abc$ (on ordonne)

Dans cette expression les trois lettres jouent le même rôle.

Donc il revient au même de commencer par a et b (ou par b et a), ou par a et c (ou c et a), ou encore par b et c (ou c et b) ; car après avoir ordonné le résultat, nous aurons toujours la *même* expression. Conclusion : l'ordre n'a pas d'importance.

- Continuons avec une liste de quatre nombres quelconques : a ; b ; c ; d .

Procédons systématiquement de gauche à droite; d'après ce qui précède, après deux étapes nous arrivons à la liste : → $a + b + c + ab + ac + bc + abc$; d

Ce qui nous donne : $(a + b + c + ab + ac + bc + abc) + d +(a + b + c + ab + ac + bc + abc)d$

Développons et ordonnons ; nous obtenons :

$$a + b + c + d + ab + ac + ad + bc + bd + cd + abc + abd + acd + bcd + abcd$$

Là encore, les lettres jouent le même rôle ; donc là encore, l'ordre n'a pas d'importance.

- Et cætera ...

Le seul résultat est 100.

Remarque. Comment ça marche? Supposons que la liste 1 , $\frac{1}{2}$, ... $\frac{1}{i}$ soit remplacée par i (i étant un entier entre 2 et 99) : c'est ce que l'on a constaté sur les premiers calculs. L'étape suivante consiste à remplacer i , $\frac{1}{i+1}$ par $i + \frac{1}{i+1} + i\times\frac{1}{i+1} = i + \frac{1}{i+1} + \frac{i}{i+1} = i + \frac{i+1}{i+1} = i+1$.

Alors la liste 1 , $\frac{1}{2}$, ... $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i+1}$ est bien remplacée par i +1 ...

Pour les curieux et curieuses. Le calcul littéral dans l'autre sens est plus délicat. Pour s'en sortir, bien observer les factorisations intéressantes sur les premiers calculs numériques.