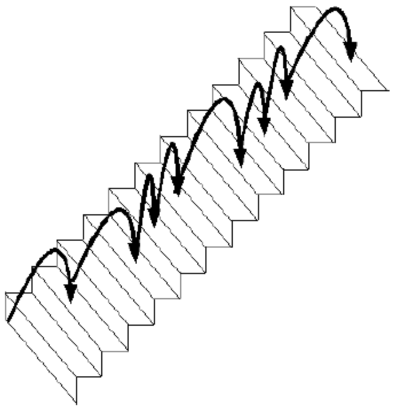
Exercice numéro 1 - L'escalier



On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois.
La figure de droite montre un exemple.

1. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de une marche ? de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ? de cinq marches ?

2. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches ?

Une des solutions possibles : à la suite de FIBONACCI
(nommé aussi Léonard de Pise; mathématicien italien, né en 1175, mort en 1250)

Par commodité, choisissons de noter N_1 le nombre de façon de monter un escalier d'une marche, N_2 le nombre de façons différentes de monter un escalier de deux marches, ... N_i le nombre de façons différentes de monter un escalier de i marches (i un nombre entier strictement positif).

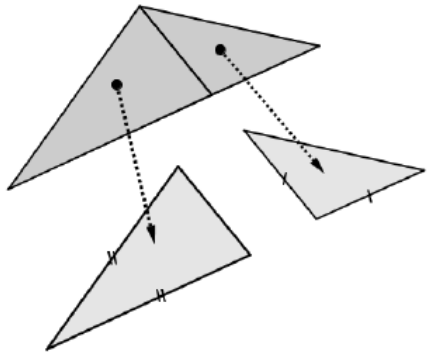
- Décomposition des premiers cas.
  - $N_1 = 1$ (1)
  - $N_2 = 2$ (1+1 ; 2)
  - $N_3 = 3$ (1+1+1 ; 1+2 ; 2+1)
  - $N_4 = 5$ (1+1+1+1 ; 2+1+1 ; 1+2+1 ; 1+1+2 ; 2+2)
  - $N_5 = 8$ (1+1+1+1+1 ; 2+1+1+1 ; 1+2+1+1 ; 1+1+2+1 ; 1+1+1+2 ; 1+2+2 ; 2+1+2 ; 2+2+1)
- Etude pour un escalier de 20 marches.
  De deux choses l'une :
  - soit on finit par monter UNE marche, et auparavant on a monté 20 – 1 = 19 marches, de N_{19} façons différentes;
  - soit on finit par monter DEUX marches à la fois, et auparavant on a monté 20 – 2 = 18 marches, de N_{18} façons différentes.

  On a donc : $N_{20} = N_{19} + N_{18}$
  De la même façon : $N_{19} = N_{18} + N_{17}$; $N_{18} = N_{17} + N_{16}$ ...
- Calcul des premières sommes.
  $N_6 = N_5 + N_4 = 8 + 5 = 13$;
  $N_7 = N_6 + N_5 = 13 + 8 = 21$;
  $N_8 = N_7 + N_6 = 21 + 13 = 34$;
  $N_9 = N_8 + N_7 = 34 +21 = 55$;
  $N_{10} = N_9 + N_8 =55+34 = 89$;
  $N_{11} = N_{10} + N_9 = 89+55 = 144$;
  $N_{12} = 144 + 89 = 233$;
  $N_{13} = 233+144 = 377$;
  $N_{14} = 377 + 233 = 610$;
  $N_{15} = 610 + 233 = 987$;
  $N_{16} = 987 + 610 = 1\,597$;
  $N_{17} = 1597 + 987 = 2\,584$;
  $N_{18} = 2\,584 + 1\,597 = 4\,181$;
  $N_{19} = 4\,181 + 2\,584 = 6\,765$;
  $N_{20} = N_{19} + N_{18} = 6\,765 + 2\,584 =$ **10 946**

<u>Il y a 10 946 façons différentes de monter un escalier de 20 marches.</u>

Exercice numéro deux - Découpages et assemblage

Le but du problème est la décomposition de certains triangles en deux triangles isocèles.
L'usage des instruments traditionnels (équerre, règle graduée, compas, rapporteur) est autorisé et sans doute nécessaire. Il est rappelé que les problèmes de construction appellent une argumentation rédigée.



Un découpage possible

(la figure n'est pas juste)

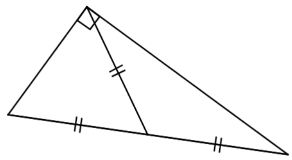
1. On considère un triangle rectangle ABC.
Décomposer ce triangle en deux triangles isocèles.

2. *a*. On considère un triangle DEF. L'angle de sommet E mesure 35 degrés et l'angle de sommet F mesure 70 degrés.
Décomposer ce triangle en deux triangles isocèles.
b. Construire un triangle GHI différent des deux précédents tel que l'on puisse le décomposer en deux triangles isocèles.

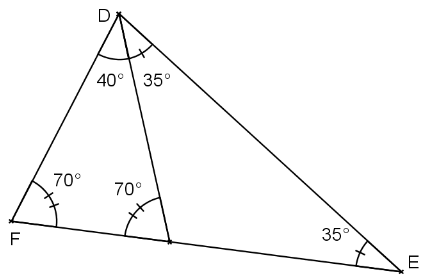
3. On considère un triangle KLM isocèle et rectangle à la base de mesure *x*. Comment lui accoler un autre triangle isocèle afin d'obtenir un nouveau triangle isocèle ?

Une des solutions possibles .

1. Soit un triangle rectangle.
La médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
Nous décomposons ainsi facilement un triangle rectangle en deux triangles isocèles.

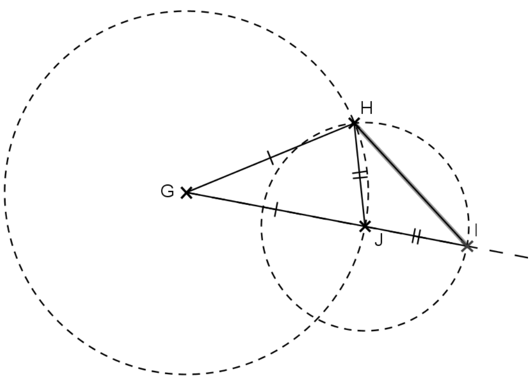


2. *a.* Soit un triangle DEF tel que $\widehat{DEF}=35°$ et $\widehat{DFE}=70°$.
Calculons une mesure du troisième angle :
la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°,
donc $\widehat{EDF}=180-(\widehat{DEF}+\widehat{DFE})$
$\widehat{EDF}=180-(35+70)$
$\widehat{EDF}=75°$



Nous remarquons qu'en décomposant cet angle en un angle de 35° et un angle de 40°, nous obtenons deux triangles isocèles. En effet,
– l'un aura deux angles de 35°,
– l'autre aura un angle de 70°, un autre de 40° et le troisième de 180 – (70 + 40) = 70°.

2. *b*. Pour varier, cherchons à obtenir une décomposition semblable à l'illustration de l'énoncé.
Construisons un premier triangle GHJ isocèle en G. Traçons ensuite le cercle de centre J et de rayon [JH]. Il coupe la demi-droite [GJ) en I.
Les triangles GHJ (isocèle en G), et HIJ (isocèle en J), composent le triangle GHI. La décomposition (un côté accolé à une base) , est différente du cas 1 (un côté commun et le même sommet) et du cas 2. *a.* (un côté commun mais des sommets différents).



3. Nous pouvons chercher les différents assemblages possibles, en considérant un triangle KLM isocèle en K :

- assemblage côté - côté (fig. 1 ; 4 ; 7) ;
- assemblage base du triangle 1 - côté du triangle 2 (fig. 2 et 3) ;
- assemblage côté du triangle 1 - base du triangle 2 (fig. 5 et 6) ;
- assemblage base - base (pas de solution)

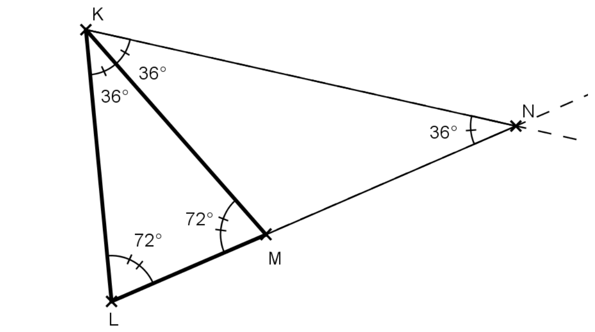


fig. 1

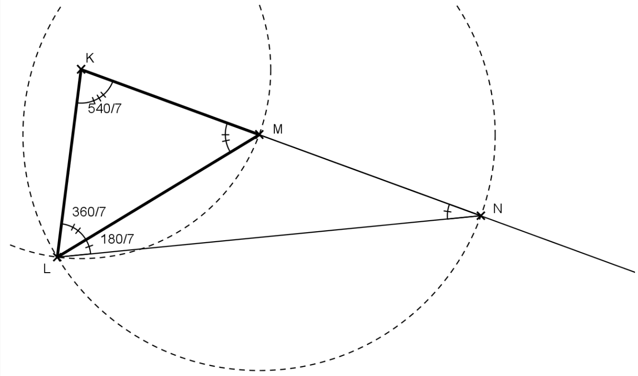


fig. 2

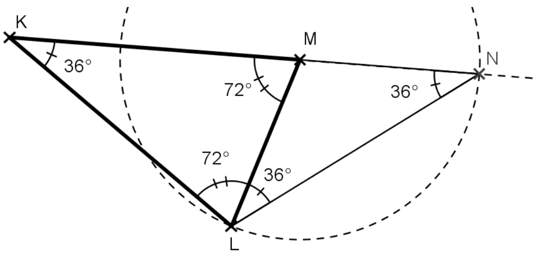


fig. 3

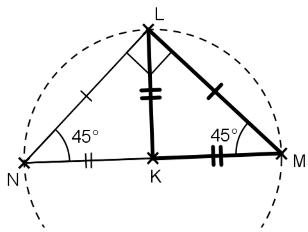


fig. 4

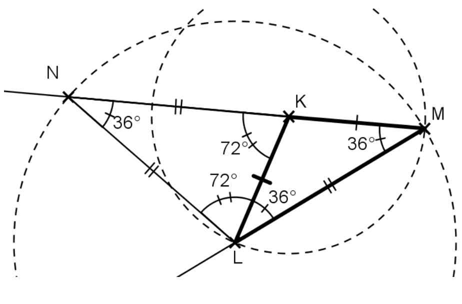


fig. 5

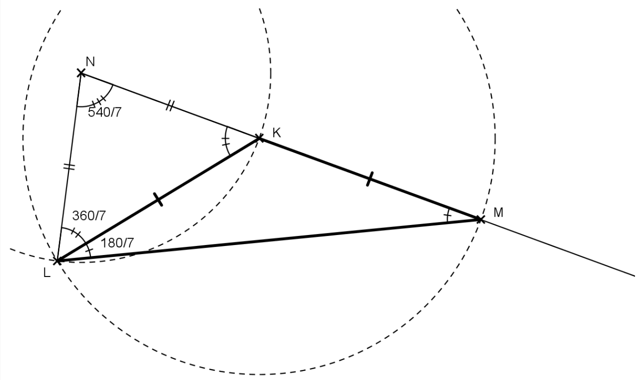


fig. 6

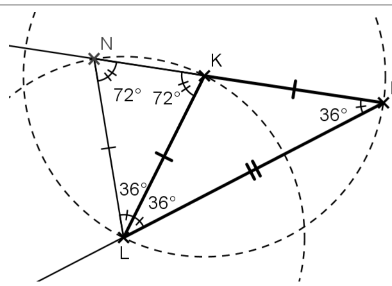


fig. 7

Etude.

Nous cherchons à obtenir un triangle isocèle en accolant un triangle isocèle à un triangle KLM isocèle en K, d'angle à la base de mesure x (en °), avec $0<x<90$.

– Cherchons d'abord à prolonger la base :

- en accolant l'angle au sommet $\widehat{KMN}$:

alors $\widehat{KML}+\widehat{KMN}=180°$, et $\widehat{MKN}=\widehat{MNK}=\dfrac{180-\widehat{KMN}}{2}=\dfrac{180-(180-x)}{2}=\dfrac{x}{2}$.

D'où $\widehat{LKN}=\widehat{LKM}+\widehat{MKN}=(180-2x)+\dfrac{x}{2}=180-\dfrac{3x}{2}$.

Les mesures des angles du triangle KLN sont donc

$\widehat{KLN}=x$; $\widehat{KNL}=\dfrac{x}{2}$; $\widehat{LKN}=180-\dfrac{3x}{2}$.

Le triangle KLN est isocèle si :

– $x=\dfrac{x}{2}$, c'est-à-dire $x = 0$: exclu ;

– ou $x=180-\dfrac{3x}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{5x}{2}=180$; $5x=360$; $x=72$ (fig.1) ;

– ou $\dfrac{x}{2}=180-\dfrac{3x}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{4x}{2}=180$; $4x=360$; $x=90$: exclu.

- en accolant un angle à la base $\widehat{KMN}$:
alors $\widehat{KML}+\widehat{KMN}=180$; $\widehat{KMN}=180-\widehat{KML}=180-x$, et l'angle au sommet du triangle KMN mesure $180-2\widehat{KMN}=180-2(180-x)=180-360+2x=2x-180$: impossible avec $0<x<90$.

– Cherchons ensuite à prolonger l'un des côtés (il revient au même de choisir [KM] ou [KN] ; nous choisissons ici [KM])

- du côté de la base [LM]

  – par l'angle au sommet $\widehat{LMN}$:

  alors $\widehat{KML}+\widehat{LMN}=180°$, et $\widehat{MLN}=\widehat{MNL}=\dfrac{180-\widehat{LMN}}{2}=\dfrac{180-(180-x)}{2}=\dfrac{x}{2}$.

  Les mesures des angles du triangle KLN sont donc

  $\widehat{LKN}=180-2x$; $\widehat{KLN}=\widehat{KLM}+\widehat{MLN}=x+\dfrac{x}{2}=\dfrac{3x}{2}$; $\widehat{KNL}=\dfrac{x}{2}$.

  Le triangle KLN est isocèle si :

  – $180-2x=\dfrac{3x}{2}$, c'est-à-dire $180=\dfrac{7x}{2}$; $x=\dfrac{360}{7}$ (fig. 2) ;

  – ou $180-2x=\dfrac{x}{2}$, c'est-à-dire $180=\dfrac{5x}{2}$; $5x=360$; $x=72$ (fig. 3) ;

  – ou $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{x}{2}$, c'est-à-dire $x = 0$: exclu ;

  – par l'angle à la base $\widehat{LMN}$:
  alors $\widehat{KML}+\widehat{LMN}=180$; $\widehat{LMN}=180-\widehat{KML}=180-x$, et l'angle au sommet du triangle LMN mesure $180-2\widehat{LMN}=180-2(180-x)=180-360+2x=2x-180$: impossible avec $0<x<90$.

- du côté du sommet $\widehat{LKM}$
  - par l'angle au sommet $\widehat{LKN}$:
    alors $\widehat{MKL}+\widehat{LKN}=180$; $\widehat{LKN}=180-\widehat{MKL}=180-(180-2x)=2x$;
    $\widehat{KLN}=\widehat{KNL}=\dfrac{180-\widehat{LKN}}{2}=\dfrac{180-2x}{2}=90-x$.
    Les mesures des angles du triangle MLN sont donc
    $\widehat{LMN}=x$; $\widehat{MLN}=\widehat{MLK}+\widehat{KLN}=x+(90-x)=90$; $\widehat{LNM}=90-x$.
    De façon évidente, le triangle MLN n'est isocèle que si $x=90-x$, c'est-à-dire $2x=90$; $x=45$ (fig. 4) ;
  - par l'angle à la base $\widehat{LKN}$:
    alors $\widehat{MKL}+\widehat{LKN}=180$; $\widehat{LKN}=180-\widehat{MKL}=180-(180-2x)=2x$, et l'angle au sommet du triangle LKN mesure $180-2\widehat{LKN}=180-2\times2x=180-4x$. Dans cette partie nous prendrons donc $0<x<45$.
    Cas 1 : l'angle au sommet du triangle LKN est $\widehat{KNL}$;
    alors les mesures des angles du triangle LMN sont
    $\widehat{NML}=x$; $\widehat{MLN}=x+2x=3x$; $\widehat{LNM}=180-4x$, et LMN est isocèle si
    - $x=3x$, c'est-à-dire $x=0$: exclu ;
    - ou $x=180-4x$, c'est-à-dire 5 x = 180 ; x = 36 (fig. 5) ;
    - ou $3x=180-4x$, c'est-à-dire 7 x = 180 ; $x=\dfrac{180}{7}$ (fig. 6) ;

    Cas 2 : l'angle au sommet du triangle LKN est $\widehat{KLN}$;
    alors les mesures des angles du triangle LMN sont
    $\widehat{NML}=x$; $\widehat{MLN}=x+(180-4x)=180-3x$; $\widehat{LNM}=2x$, et LMN est isocèle si
    - $x=180-3x$, c'est-à-dire $4x=180$; $x=45$: exclu dans cette partie.
    - ou $x=2x$, c'est-à-dire x = 0 : exclu ;
    - ou $180-3x=2x$, c'est-à-dire 180 = 5 x ; x = 36 (fig. 7) ;

Autre méthode : on peut également partir du triangle « final » et chercher s'il est décomposable en deux triangles isocèles.

Exercice numéro 3

Des un avec des neuf

1. Calculer les sommes : $a = 99 + 999$ et $b = 99 + 999 + 9999$.

2. On considère le nombre N défini comme la somme :

$$N = 99 + 999 + 9999 + ... + 9999999 \cdots 999$$

Le premier terme de cette somme s'écrit avec deux chiffres 9 ; on ajoute les nombres s'écrivant avec trois puis quatre chiffres 9, etc. Le dernier terme de la somme s'écrit avec cent chiffres 9.

On effectue la somme et on écrit N en écriture décimale ordinaire. Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans cette écriture ?

Une des solutions possibles .

1. a = 99 + 999 = **1 098** ; b = 99 + 999 + 9 999 = **11 097**

2. Calcul de N.
Le premier terme de N s'écrit avec deux chiffres 9, le dernier terme de N s'écrit avec cent chiffres 9 : N est une somme de 100 – 2 + 1 = 99 termes.

$$N = 99 + 999 + 9\,999 + \ldots + \underbrace{9\,999\,999\ldots999}_{\text{cent chiffres 9}}$$

$$N = (100-1) + (1\,000-1) + (10\,000-1) + \ldots + (\underbrace{10\,000\,000\ldots000}_{\text{un chiffre 1 et cent chiffres 0}} - 1)$$

$$N = 100 + 1\,000 + 10\,000 + \ldots + \underbrace{10\,000\,000\ldots000}_{\text{un chiffre 1 et cent chiffres 0}} - 99$$

$$N = \underbrace{11\,111\,111\ldots111\,100}_{\text{quatre-vingt-dix-neuf chiffres 1 et deux chiffres 0}} - 99$$

$$N = \underbrace{11\,111\,111\ldots111\,001}_{\text{quatre-vingt-dix-neuf chiffres 1 et deux chiffres 0}}$$

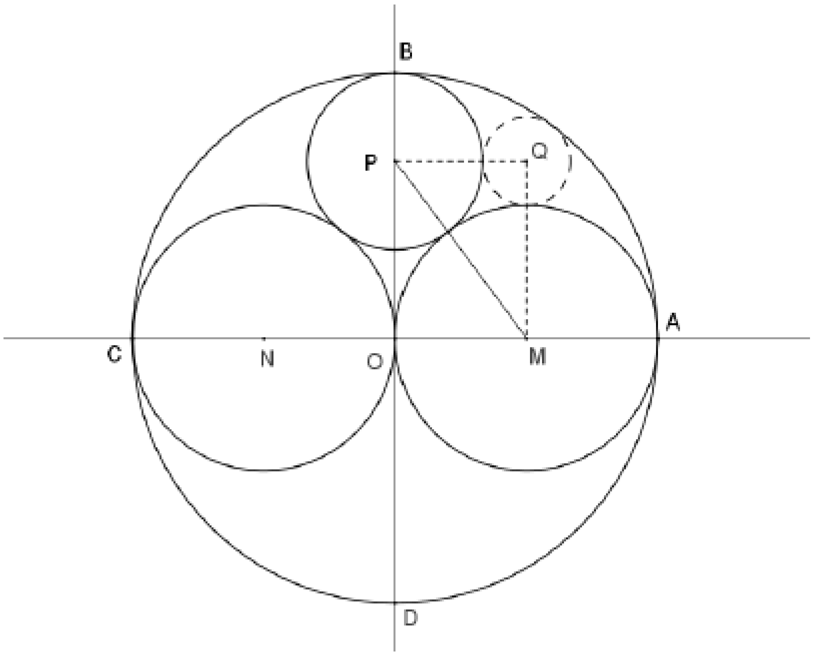
Le chiffre 1 apparaît
quatre-vingt-dix-neuf fois
dans l'écriture décimale ordinaire du nombre N.

Exercice numéro 4 - Faites-moi une petite place

On considère un cercle C_0, de centre O et de rayon 6, et deux diamètres perpendiculaires [AC] et [BD] de ce cercle. On désigne par M et N les milieux de [AO] et [OC]. On note C_1 et C_2 les cercles de rayon 3 et de centres respectifs M et N.

1. Déterminer la position du centre P et le rayon du cercle C_3 tangent aux cercles C_0 , C_1 et C_2 (on rappelle que les centres de deux cercles tangents et leur point de contact sont alignés).

2. Montrer que, si on appelle Q le centre du cercle C_4 tangent aux cercles C_0 , C_1 et C_3 , le quadrilatère MOPQ est un rectangle. Quel est le rayon du cercle C_4 ?

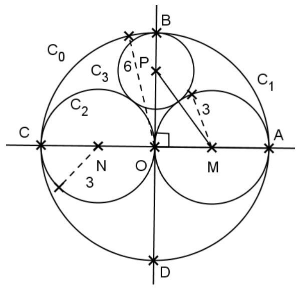


Une des solutions possibles .

1. Si C_3 existe, alors C_1 et C_3 sont tangents extérieurement, donc la distance entre leurs centres M et P est égale à la somme de leurs rayons : MP = 3 + R_3 , en notant R_3 le rayon du cercle C_3 (s'il existe).

De même, C_2 et C_3 sont tangents extérieurement, donc la distance entre leurs centres N et P est égale à la somme de leurs rayons : NP = 3 + R_3.

Le point P doit être à la même distance des points M et N.



Or, si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Donc <u>P doit être sur la médiatrice du segment [MN], qui est ici la droite (BD).</u>

(OM = ON = 3, et N, O, M sont alignés sur (AC), donc O est le milieu du segment [MN] ; de plus (AC) et (BD) sont perpendiculaires ;

par définition, la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu).

<u>Calcul du rayon R_3 du cercle C_3 .</u>

Si P existe, alors le triangle POM est rectangle en O; et d'après la propriété de Pythagore :

$$MP^2 = OM^2 + OP^2 \quad .$$

– Remarquons d'abord que MP = 3 + R_3 , donc

$$MP^2 = (3 + R_3)^2 = (3 + R_3)\times(3 + R_3) = 3\times3 + 3\times R_3 + R_3\times3 + R_3\times R_3 = 9 + 6R_3 + R_3^2$$

– Remarquons aussi que OP = R_0 – R_3 = 6 – R_3 , donc

$$OP^2 = (6 - R_3)^2 = (6 - R_3)\times(6 - R_3) = 6\times6 - 6\times R_3 - R_3\times6 + R_3\times R_3 = 36 - 12R_3 + R_3^2$$

Reportons ces résultats dans l'égalité $MP^2 = OM^2 + OP^2$:

nous obtenons $9 + 6R_3 + R_3^2 = 3^2 + 36 - 12R_3 + R_3^2$.

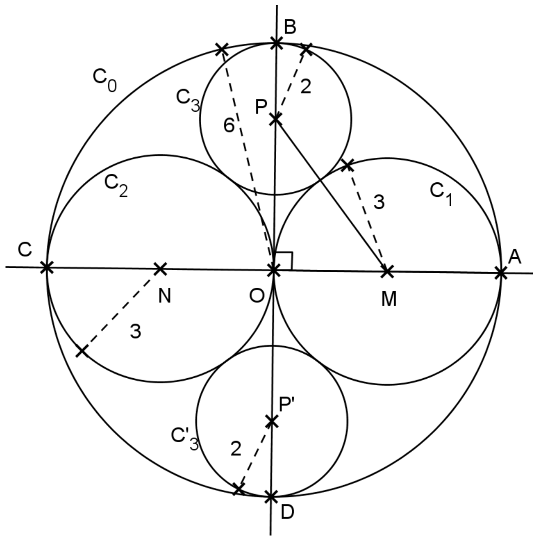
En ôtant 9, puis R_3^2 , à chaque membre, il vient $6R_3 = 36 - 12R_3$.

Ajoutons 12 R_3 à chaque membre : $18R_3 = 36$, et enfin divisons par 18 : <u>$R_3 = 2$</u>

Position du point P.

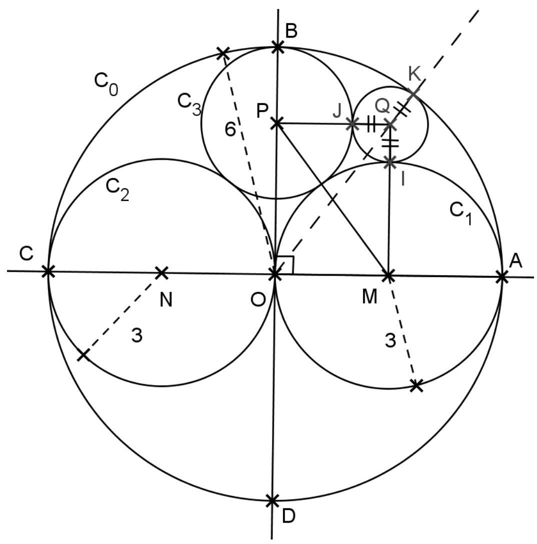
OP= $R_0 - R_3 = 6 - R_3 = 6 - 2 = 4$, donc P doit être sur la droite (BD), à 4 unités du point O: il y a deux possibilités, que nous noterons P et P'. Nous vérifions facilement que ces deux points sont solution.

Il y a deux cercles tangents aux cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre P et de rayon 2, et le cercle $\mathcal{C}'_3$ de centre P' et de rayon 2 (où P et P' sont les deux points de la droite (BD) situés à 4 unités de O).



2. Nous remarquons tout d'abord que le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre N et de rayon 3 est tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$.

Cherchons une autre solution. Après différents essais, nous conjecturons que le point Q tel que MOPQ est un rectangle est le centre d'un cercle solution. Vérification :
nommons I l'intersection du segment [QM] et du cercle $\mathcal{C}_1$, J l'intersection du segment [QP] et du cercle $\mathcal{C}_3$, K l'intersection de la demi-droite [OQ) et du cercle $\mathcal{C}_0$.
Les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur, donc :



- QI = QM – IM = PO – IM = 4 – 3 = 1 : le cercle de centre Q et de rayon 1 et le cercle $\mathcal{C}_1$ sont tangents extérieurement (la distance de leurs centres est égale à la somme de leurs rayons) ;
- QJ = QP – JP = MO – JP = 3 – 2 = 1 : le cercle de centre Q et de rayon 1 et le cercle $\mathcal{C}_3$ sont tangents extérieurement (la distance entre leurs centres est égale à la somme de leurs rayons).

De plus les diagonales d'un rectangle ont la même longueur,
donc QK = OK – QO = OK – PM = 6 – 5 = 1 : le cercle de centre Q et de rayon 1 et le cercle $\mathcal{C}_0$ sont tangents intérieurement (la distance entre leurs centres est égale à la différence de leurs rayons).

Le cercle de centre Q et de rayon 1, où Q est tel que MOPQ est un rectangle, est tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$.

Nous admettrons qu'il n'y a pas d'autre solution.
Cela se conjecture très joliment avec un logiciel de géométrie dynamique, et peut se démontrer, à un autre niveau.