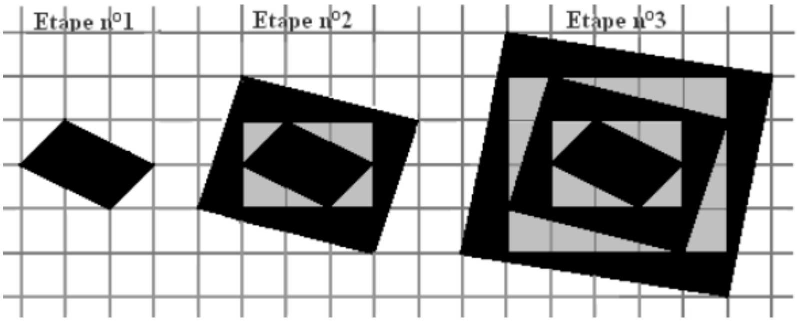
Olympiades académiques de quatrième. Jeudi 6 mai 2010. Eléments de correction.

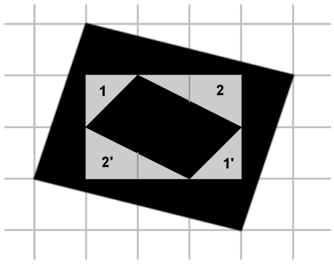
Exercice 1. Noir et blanc.

On construit une suite de motifs selon un procédé dont les trois premières étapes sont représentées ci-contre. L'unité d'aire est le carreau de quadrillage.



Une première méthode.

1. a. <u>Aire totale des parties intérieures claires à l'étape 2</u>.



Nous remarquons que le triangle clair en haut à gauche s'assemble avec le triangle clair en bas à droite pour former un carré de côté 1, donc d'aire 1² = 1 , et que le triangle clair en haut à droite s'assemble avec le triangle clair en bas à gauche pour former un rectangle de longueur 2 et de largeur 1, d'aire $2 \times 1 = 2$.

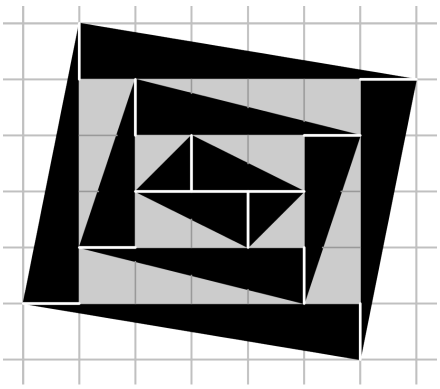
L'aire totale des parties intérieures claires à l'étape 2 est donc 1 + 2 = **3**.

<u>Aire totale des parties intérieures claires à l'étape 3</u>.

Nous remarquons à nouveau que le triangle clair en haut à gauche s'assemble avec le triangle clair en bas à droite pour former un rectangle de longueur 3 et de largeur 1, donc d'aire $3 \times 1 = 3$, et que le triangle clair en haut à droite s'assemble avec le triangle clair en bas à gauche pour former un rectangle de longueur 4 et de largeur 1,d'aire $4 \times 1 = 4$.

L'aire totale des parties intérieures claires à l'étape 3 est donc (1 + 2) + (3 + 4) = **10**.

1. b. <u>Aire totale des parties noires à l'étape 2</u>.



Nous remarquons que le quadrilatère noir de l'étape 1 est constitué de quatre triangles qui s'assemblent comme les triangles clairs de l'étape 2, pour former un carré d'aire 1 et un rectangle d'aire 2.

A l'étape 2 sont ajoutés quatre triangles noirs qui s'assemblent à nouveau comme les triangles clairs ajoutés à l'étape 3, pour former un rectangle d'aire 3 et un rectangle d'aire 4.

L'aire totale des parties noires à l'étape 2 est donc (1 + 2) + (3 + 4) = **10**.

<u>Aire totale des parties noires à l'étape 3</u>.

Ici sont ajoutés quatre triangles noirs qui s'assemblent pour former un rectangle d'aire 5 et un rectangle d'aire 6.

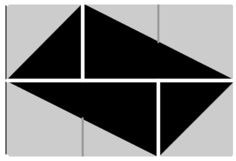
L'aire totale des parties noires à l'étape 3 est donc (1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) = **21**.

2. Poursuivons le processus.

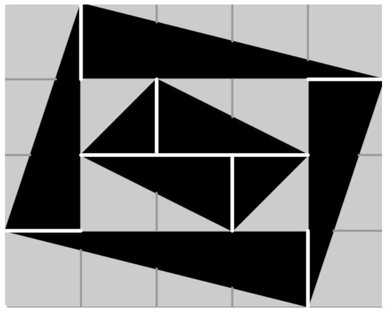
a. A l'étape 4, l'aire totale des parties intérieures claires est (1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) = **21** ; l'aire totale des parties noires est (1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) + (7 + 8) = **36**.

b. A chaque étape on ajoute quatre triangles clairs, qui s'assemblent deux à deux.
A l'étape 20, on forme $2\times(20-1)=38$ rectangles clairs ;
l'aire totale des parties intérieures claires est : (1 + 2) + (3 + 4) + ... + (37 + 38) = **741** ;
La partie noire est constituée de quatre triangles supplémentaires;
son aire est (1 + 2) + (3 + 4) + ... + (37 + 38) + (39 + 40) = **820**.

Une autre méthode.



1. a. Nous remarquons qu'à l'étape 2, les parties claires sont la moitié d'un rectangle de longueur 3 et de largeur 2 (nous le découpons en quatre rectangles, chacun pour moitié clair et pour moitié noir).
Donc l'aire totale des parties intérieures claires à l'étape 2 est $\frac{3\times2}{2}=3$.



De même à l'étape 3, les parties claires sont la moitié d'un rectangle de longueur 5 et de largeur 4.
L'aire totale des parties intérieures claires à l'étape 3 est donc $\frac{5\times4}{2}=10$.

Nous calculons de même les aires des parties noires.
A l'étape 2, l'aire totale des parties noires est la moitié de l'aire du rectangle de longueur 5 et de largeur 4. L'aire totale des parties noires à l'étape 2 est donc $\frac{5\times4}{2}=10$.

A chaque étape, la longueur des rectangles augmente de 2 unités, et la largeur de même.
A l'étape 3, l'aire totale des parties noires est la moitié de l'aire d'un rectangle de longueur 5+2 et de largeur 4+2.
L'aire totale des parties noires à l'étape 3 est donc $\frac{7\times6}{2}=21$.

2. Poursuivons le processus.
A l'étape 4, les parties claires sont la moitié d'un rectangle de longueur (5+2) et de largeur (4+2); c'est l'aire totale des parties noires de l'étape 3, c'est-à-dire 21.
Pour les parties noires nous calculons la moitié de l'aire d'un rectangle de longueur $1+2\times4$ et de largeur 2×4 ; c'est $\frac{9\times8}{2}=36$.
A l'étape 20, l'aire totale des parties claires est $\frac{[1+2\times(20-1)]\times[2\times(20-1)]}{2}=741$,

et l'aire totale des parties noires est $\frac{(1+2\times20)\times(2\times20)}{2}=820$.

Exercice 2. Nombres à la chaîne.

1	→	2		9	→	10		25	→
		↓		↑		↓		↑	
4	←	3		8		11		24	
↓				↑		↓		↑	
5	→	6	→	7		12		23	
						↓		↑	
16	←	15	←	14	←	13		22	
↓								↑	
17	→	18	→	19	→	20	→	21	

Une première méthode.

Le tableau se remplit carré par carré.

Le premier carré, de côté 1, contient un nombre.

Le deuxième, de côté 2, contient 2² =4 nombres.

Le troisième, de côté 3, contient 3² = 9 nombres.

...

Le 25e, de côté 25, contient 25² = 625 nombres.

Alternativement, un carré est achevé :

- sur la première ligne (s'il est de côté impair), en haut d'une colonne " montante" ;
- ou sur la première colonne (s'il est de côté pair), à gauche d'une ligne écrite pour partie de droite à gauche.

Le carré de côté 25, nombre impair, se termine donc sur la 25e colonne de la première ligne par 625. Descendons cette colonne :

- sur la 2e ligne , nous trouvons le nombre 624 (625 - 1 = 624);
- sur la 3e ligne , nous trouvons le nombre 623 (625 - 2 = 623);

...

- sur la 25e ligne , nous trouvons le nombre **601** (625 - 24 = 601).

Variante. Le carré de côté 24, nombre pair, se termine par 24² = 576 sur la 1ère colonne de la 24e ligne. L'entier consécutif se trouve alors sur la 1ère colonne de la 25e ligne. Il suffit donc d'ajouter 25 à 576 pour trouver le nombre cherché.

A l'intersection de la vingt-cinquième ligne et de la vingt-cinquième colonne se trouve 601.

Une autre méthode.

Intéressons-nous à la diagonale 1 ; 3 ; 7 ; 13 ; 21 ...

Pour passer d'un nombre de la diagonale au suivant, il faut compléter le côté commencé et écrire complètement le suivant.

Par exemple, pour passer de 13 à 21, il faut écrire les trois nombres 14 ; 15 ; 16 pour finir le carré de côté quatre, et écrire les cinq nombres suivants du prochain carré, de côté cinq.

Plus généralement, pour passer du ne nombre de la diagonale au (n+1)e, il faut écrire (n−1) nombres pour finir le côté, et écrire (n+1) nombres sur un nouveau côté (n entier strictement positif). Comme (n − 1) + (n + 1) = 2n, nous passons du ne nombre de la diagonale au (n+1)e en ajoutant 2n nombres.

$$1 \xrightarrow{+2\times 1} 3 \xrightarrow{+2\times 2} 7 \xrightarrow{+2\times 3} 13 \xrightarrow{+2\times 4} 21 \xrightarrow{+\ ...} \ ... \xrightarrow{+2\times 24} \ ?$$

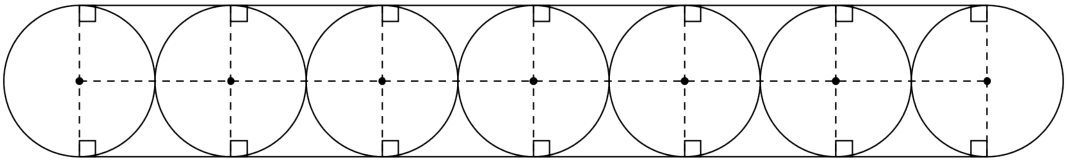
Calculons : $1+2\times 1+2\times 2+2\times 3+2\times 4+...+2\times 24 = 1+2(1+2+3+4+...+24) = 601$.

Exercice 3. Le meilleur emballage.

Dans toute la suite, nous noterons D *le diamètre d'un tuyau.*
Dans les deux cas, les tours sont formés de segments aux supports tangents aux tuyaux et d'arcs de cercles.

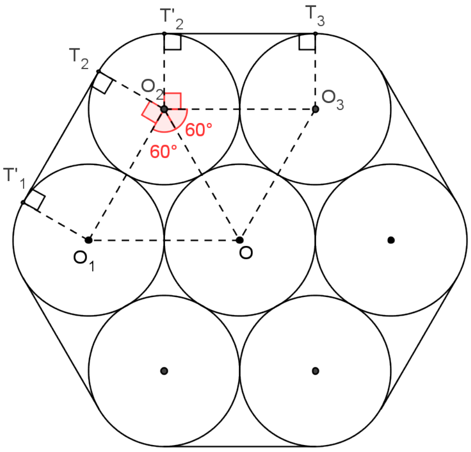
1. Disposition à plat.

Le tour est constitué de deux segments de longueur $6 \times D$, et de deux demi-cercles de diamètre D.



Sa longueur est donc $2 \times 6\,D + \pi\,D = \underline{12\,D + \pi\,D}$.
Pour D = 20 cm, on obtient $12 \times 20 + \pi \times 20$; le tour mesure $\underline{240 + 20\,\pi \text{ cm}}$.

2. Disposition en fagot.



Considérons le triangle OO_1O_2.
Ses trois côtés étant des diamètres, le triangle est équilatéral; donc $\widehat{O_1O_2O} = 60°$.

De même, le triangle OO_2O_3 est équilatéral;
donc $\widehat{OO_2O_3} = 60°$.

Considérons maintenant le quadrilatère $O_1O_2T_2T'_1$.
- Ses côtés $[O_1T'_1]$ et $[O_2T_2]$ sont des rayons, ils ont donc la même mesure.
- Les supports de ces côtés sont tous deux perpendiculaires à la droite (T'_1T_2), donc parallèles entre eux.

Le quadrilatère non croisé $O_1O_2T_2T'_1$ a deux côtés de même mesure et de supports parallèles, c'est un parallélogramme.
De plus il a un angle droit, c'est donc un rectangle.
D'où $\widehat{O_1O_2T_2} = 90°$ et $T'_1T_2 = O_1O_2 = D$.

Nous montrons de même que le quadrilatère $O_2O_3T_3T'_2$ est un rectangle ;
d'où $\widehat{O_3O_2T'_2} = 90°$.

Calcul d'une mesure de l'angle $\widehat{T_2O_2T'_2}$.

$\widehat{T_2O_2T'_2} = 360 - (\widehat{T_2O_2O_1} + \widehat{O_1O_2O} + \widehat{OO_2O_3} + \widehat{O_3O_2T'_2})$
$\widehat{T_2O_2T'_2} = 360 - 2\,(90 + 60)$
$\widehat{T_2O_2T'_2} = 60°$

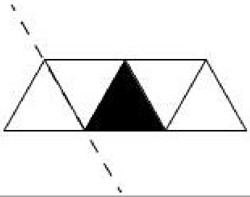
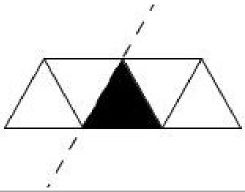
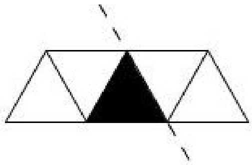
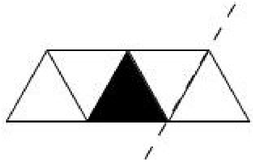
Donc l'arc $\overset{\frown}{T_2T'_2}$ mesure 1/6 du périmètre du cercle de diamètre D (60/360 = 1/6) .

Le tour est formé de six segments de longueur D, et de six sixièmes d'arcs de cercle de diamètre D. Sa longueur donc est $\underline{6\,D + \pi\,D}$; avec D = 20 cm, c'est $\underline{120 + 20\,\pi \text{ cm}}$.

<u>Valeurs arrondies à l'unité</u>: disposition à plat : <u>303 cm</u>; disposition en fagot : <u>183 cm</u>;
différence: 303 − 183 = 120.
<u>On gagne environ 120 cm avec la seconde disposition, soit 40%</u> ($120 : 303 \approx 0{,}40$).

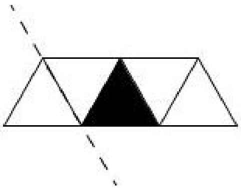
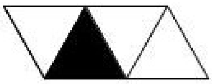
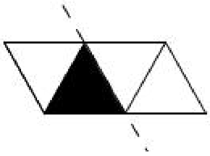
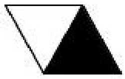
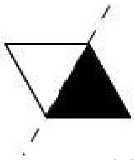
Exercice 4. Découpage(s) gagnant(s).

1. Au départ, Amandine a quatre possibilités de découpage :

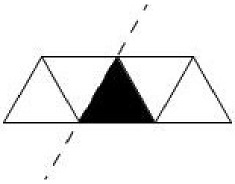
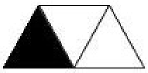
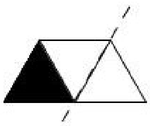
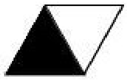
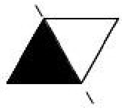
Cas a	Cas b	Cas c	Cas d
			

Dans toute la suite, nous noterons A *pour Amandine, et* B *pour Benjamin.*

Cas a.

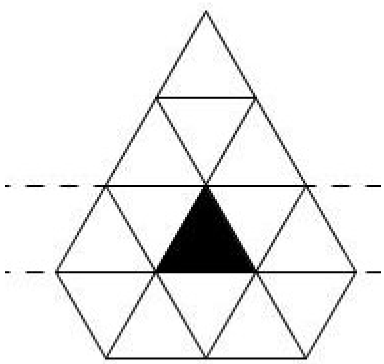
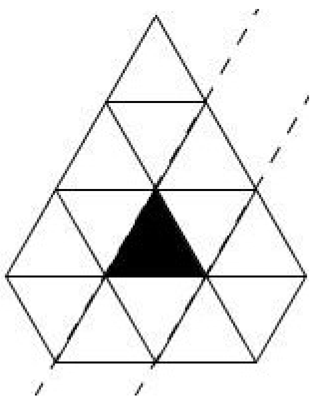
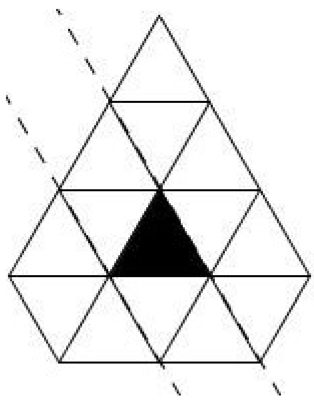
A coupe :	B reçoit :	B coupe :	A reçoit :	A coupe :
				 et perd !

Cas b.

A coupe :	B reçoit :	B coupe :	A reçoit :	A coupe :
				 et perd !

Le cas c se ramène au cas b, le cas d se ramène au cas a. Donc, si B joue bien, il est sûr de toujours gagner; *la figure 1 est **perdante** pour qui la reçoit*.

2. Si A coupe le long d'un côté du triangle noir, alors il suffit à B de couper parallèlement en passant par le sommet opposé pour retrouver la figure 1, perdante pour A qui la reçoit; B peut obtenir la même figure si A coupe sur un sommet, en coupant le long du côté opposé à ce sommet.

Il ne reste qu'une possibilité : A coupe le petit triangle de la pointe. Alors B est obligé de couper sur l'une des lignes pointillées ci-dessus, A coupe sur la ligne pointillée parallèle, et donne à B la figure 1, perdante pour qui la reçoit d'après 1. Ainsi A peut gagner à coup sûr,

*la figure 2 est **gagnante** pour qui la reçoit*.

*Remarque : peut-on dire si la figure 3 est **gagnante** ou **perdante** pour A qui commence ?*