Olympiades académiques de quatrième. Vendredi 1er avril 2011. Eléments de correction.

Exercice 1 : Des heures carrées

Pierre peut être rentré à **<u>04 h 36</u>** (00 h 16 + 4 h 20) ou à **<u>09 h 09</u>** (04 h 49 + 4 h 20).

Exercice 2 : Barrières puzzle

1. S'ils existent, les terrains doivent avoir un périmètre P égal à la somme
11 + 10 + 9 + 7 + 4 + 3 + 2 ; c'est-à-dire **<u>P = 46 m</u>**.

2. A la suite de la barrière de 3 m, on pose la barrière de 11 m; l'autre largeur est formée par la barrière de 9 m, et il reste les barrières de 10 m et 4 m pour la dernière longueur.

3. Pour clôturer un terrain rectangulaire de largeur 7 m, on doit utiliser les barrières de longueurs 7 m ; 4 m et 3 m. Il reste alors les barrières de 11 m; 10 m ; 9 m et 2 m pour faire des longueurs de 16 m $\left(\dfrac{46 - 2 \times 7}{2} = 16 \right)$, ce qui est bien **<u>impossible</u>** :
<u>Marc a raison</u>.

4. On trouve : largeur l = 9 m et longueur L = 14 m ; d'où aire $A = 9 \times 14$; $A = 126 \text{ m}^2$
ou : largeur l = 10 m et longueur L = 13 m ; d'où aire $A = 10 \times 13$; $A = 130 \text{ m}^2$
ou : largeur l = 11 m et longueur L = 12 m ; d'où aire $A = 11 \times 12$; $A = 132 \text{ m}^2$

Les aires des terrains qu'il est possible dans ces conditions d'entourer sont donc :
<u>126 m² ; 130 m² et 132 m²</u>.

Exercice 3 : Partie de fléchettes

1 . On vérifie : 26 = 11 + 5 + 5 + 5 ; 43 = 11 + 11 + 11 + 5 + 5 (par exemple) ,
et $220\,012 = 44\,001 \times 5 + 7$ (c'est **une** des décompositions possibles) .

2. a. **<u>40 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5</u>** ; **<u>40 = 5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 11</u>**
<u>40 = 5 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7</u> ; **<u>40 = 7 + 11 + 11 + 11</u>**

b. Comme $3 \times 11 = 33$, on peut avoir au maximum trois fléchettes dans la zone à 11 points; et on ne pourra alors obtenir un score de 34.

- Cherchons une solution avec deux fléchettes dans la zone à 11 points ; il manque alors $34 - 2 \times 11 = 12$ points, ce qui ne s'obtient que d'une seule façon (7 + 5).
- Cherchons une solution avec une fléchette dans la zone à 11 points ; il manque alors $34 - 11 = 23$ points, score que l'on ne peut obtenir :
  - ni avec 3 fléchettes dans la zone à 7 points (il manque alors $23 - 3 \times 7 = 2$ points, nombre qui n'est pas multiple de 5) ,
  - ni avec deux fléchettes dans la zone à 7 points (il manque alors $23 - 2 \times 7 = 9$ points),
  - ni avec une fléchette dans la zone à 7 points (il manque alors $23 - 7 = 16$ points).
- Cherchons enfin une solution sans fléchette dans la zone à 11 points ; avec une étude comme ci-dessus, on trouve une seule solution : deux fléchettes à 7 points et quatre fléchettes à 5 points.

<u>34 = 11 + 11 + 7 + 5</u> et **<u>34 = 7 + 7 + 5 + 5 + 5 + 5</u>**

3. Décomposons de manière organisée :

11 + 11 + 11 = 33	11 + 5 + 5 = 21

11 + 11 + 7 = 29	7 + 7 + 7 = 21
11 + 11 + 5 = 27	7 + 7 + 5 = 19
11 + 7 + 7 = 25	7 + 5 + 5 = 17
11 + 7 + 5 = 23	5 + 5 + 5 = 15

Scores possibles avec trois fléchettes, par ordre décroissant :
33 ; 29 ; 27 ; 25 ; 23 ; 21 ; 19 ; 17 ; 15

4. a. 14 = 7 + 7 ; 15 = 5 + 5 + 5 ; 16 = 11 + 5 ; 17 = 7 + 5 + 5 ; 18 = 11 + 7
b. A partir de ces cinq scores, on peut obtenir tous les scores supérieurs en ajoutant des fléchettes dans la zone à 5 points (19 = 14 + 5 ; 20 = 15 + 5 ; 21 = 16 + 5 …)
Intéressons-nous donc aux entiers inférieurs à 14 :
5; 7 et 11 sont bien sûr des scores possibles, ainsi que 10 (10 = 5 + 5)
et 12 (12 = 7 + 5) ; les seuls que l'on ne pourra obtenir sont **1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 et 13**.

Exercice 4 : Creusez de plus en plus mais de moins en moins

1. A chaque changement, l'aire diminue de 1/9 ; il en reste donc $1 - 1/9 = 8/9$. Notons A_i l'aire du tapis à l'étape i ; toutes les valeurs approchées sont des arrondis au centième.

$$A_1 = \frac{8}{9} \times A_0 \;;\; A_1 = \frac{8}{9} \times 27^2 \;;\; A_1 = 648$$

$$A_2 = \frac{8}{9} \times A_1 \;;\; A_2 = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times A_0 \;;\; A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times A_0 \;;\; A_2 \approx 0{,}79 \times A_0$$

$$A_3 = \frac{8}{9} \times A_2 \;;\; A_3 = \frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times A_0 \;;\; A_3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \times A_0 \;;\; A_3 \approx 0{,}70 \times A_0$$

De même : $A_4 = \left(\frac{8}{9}\right)^4 \times A_0 \;;\; A_4 \approx 0{,}62 \times A_0 \;;\; A_5 = \left(\frac{8}{9}\right)^5 \times A_0 \;;\; A_5 \approx 0{,}55 \times A_0$

$$A_6 = \left(\frac{8}{9}\right)^6 \times A_0 \;;\; A_6 \approx 0{,}49 \times A_0$$

A la cinquième étape, l'aire du tapis est encore légèrement supérieure à la moitié de l'aire initiale; **elle devient inférieure à la sixième étape**.

2. A chaque étape, on perd 7/27 du volume de l'éponge; il en reste donc $1 - 7/27 = 20/27$. Avec les mêmes conventions qu'en 1., nous avons :

$$V_1 = \frac{20}{27} \times V_0 \;;\; V_1 \approx 0{,}74 \times V_0 \;;\; V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 \times V_0 \;;\; V_2 \approx 0{,}55 \times V_0$$

$$V_3 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 \times V_0 \;;\; V_3 \approx 0{,}41 \times V_0$$

A la deuxième étape, le volume de l'éponge est encore légèrement supérieur à la moitié du volume initial; **il devient inférieur à la troisième étape**.