# CONCOURS PAR ÉQUIPE 2016
# ÉLÉMENTS DE SOLUTION

**Exercice 1 Un air de famille**

On peut d'abord observer que $d$ ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 5 ou 6.

**1. Y a-t-il des solutions pour lesquelles $\boldsymbol{d = 0}$ ?**

Si $N = (a \times 10^2 + b \times 10 + c) \times 10$, alors $N^2 = (a \times 10^2 + b \times 10 + c)^2 \times 10^2$ et donc $N^2$ se termine par deux 0 consécutifs, et donc $c = 0$, etc. Il n'y a donc pas de solutions pour lesquelles $d = 0$.

**2. Y a-t-il des solutions pour lesquelles $\boldsymbol{d = 1}$ ?**

Appelons $A$ le nombre $A = \ a \times 10^2 + b \times 10 + c$. On peut écrire $N^2 = (10A + 1)^2$,
ou encore $N^2 = 100 \times A^2 + 20 \times A + 1$

Il s'ensuit que $2c = c$ et donc $c = 0$.

Recommençons avec le nombre $B = 10a + b$. On peut écrire $N^2 = (100B + 1)^2$, avec une conséquence semblable à la précédente $2b = b$ et donc $b = 0$.

La dernière étape conduit à $2a = a$.

Il n'y a pas de solutions pour lesquelles $d = 1$ .

**3. Y a-t-il des solutions pour lesquelles $\boldsymbol{d = 5}$ ?**

Le carré de tout nombre entier se terminant par 5 se termine par 25 (Car, pour tout entier $A$, $(10A + 5)^2 = 100(A^2 + A) + 25$ . On cherche donc un entier $N$ qui se termine, comme son carré, par 25. Mais le carré de tout entier se terminant par 25 se termine par 625 (Car $(100A + 25)^2 = 5\,000(2A^2 + A) + 625$). On cherche donc un entier $N$ dont l'écriture se termine par 625. Le carré de tout nombre se terminant par 625 se termine par 390 625, mais le cas $a = 0$ est exclu.

Il n'y a pas de solutions pour lesquelles $d = 5$ .

**4. Y a-t-il des solutions pour lesquelles $\boldsymbol{d = 6}$ ?**

On écrit $N$ sous la forme $10A + 6$ . Son carré s'écrit $100 \times A^2 + 120 \times A + 36$, dont le chiffre des unités est 6, bien entendu, et le chiffre des dizaines $2c + 3$. Il s'ensuit que $c = 7$.

On écrit $N$ sous la forme $100B + 76$. Son carré s'écrit $10^4 \times B^2 + 15\,200 \times B + 5\,776$ ; l'équation portant sur le chiffre des dizaines s'écrit $2b + 7 = b + 10$ et donc $b = 3$.

$(1\,000 \times a + 376)^2 = 10^6 a^2 + 752\,000 \times a + 141\,376$. Cette égalité conduit cette fois à $a = 9$.

La solution du problème ne peut être que 9 376.

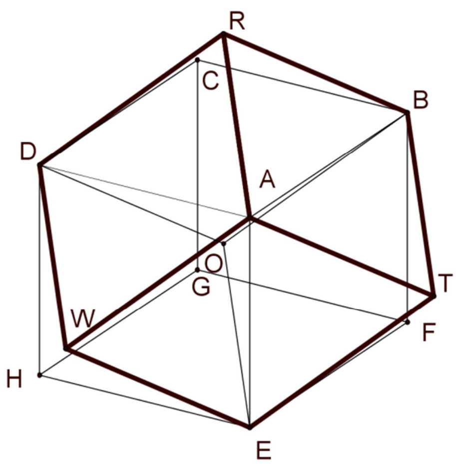
On vérifie que $9\,376^2 = 87\,909\,376$.

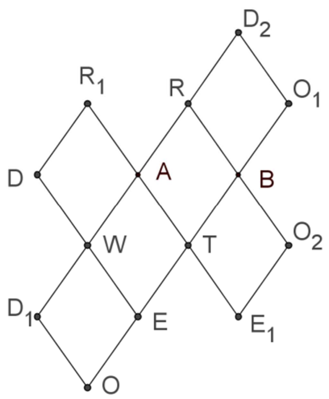
**Exercice 2 Puzzle 3D**

**1. *a.*** On peut dire que 24 faces triangulaires ont été construites. La question posée consiste à savoir si certaines de ces faces, contiguës, n'en forment pas une seule, à deux. Le plan (ORT) contient les points M et N et coupe l'arête [AB] en son milieu K. Dans le plan (ORT), l'angle $\widehat{\mathrm{RKM}}$ mesure 45°, l'angle $\widehat{\mathrm{TKN}}$ aussi et l'angle $\widehat{\mathrm{NKM}}$ est droit. Il s'ensuit que les points R, K et T sont alignés. Les plans (TAB) et (RAB) contiennent donc deux droites distinctes concourantes : ils sont confondus. Les faces ATB et ARB n'en font qu'une. Le solide construit a donc 12 faces.

***b.*** Ces faces sont des losanges (les triangles RAB et TAB sont isocèles et construits de manière identique). Leurs côtés ont pour longueur $\sqrt{3}$ (la demi-diagonale du cube). Reste à mesurer les angles. Le triangle RAK, rectangle en K, a pour côtés de l'angle droit 1 et $\sqrt{3}$ (on calcule RA comme hypoténuse du triangle RMA, dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et $\sqrt{2}$). Par conséquent, le cosinus de $\widehat{\mathrm{RAK}}$ est $\frac{1}{\sqrt{3}}$. L'angle $\widehat{\mathrm{RAT}}$, double de $\widehat{\mathrm{RAK}}$, mesure donc 109,47° (valeur arrondie au centième). L'angle $\widehat{\mathrm{ARB}}$, quant à lui, mesure 70,53° (valeur arrondie au centième).

Douze faces identiques, qui sont des losanges, cela donne le nom du solide : le dodécaèdre rhombique.

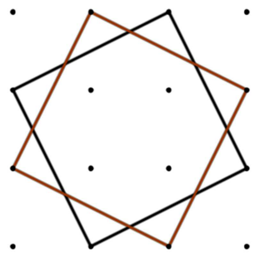




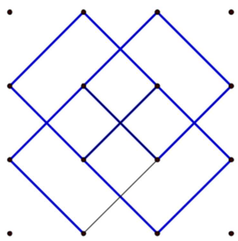

**2.** Trois faces ayant un sommet commun, comme par exemple ARBF, AFEW, AWDR, et trois losanges ayant pour sommets O et DEW, BFE et DRB respectivement, forment un solide à six faces toutes identiques. Pour l'affirmer, il faut calculer les distances OD, OE et OB. Ce sont les distances du centre du cube à un des sommets : $\sqrt{3}$. Cela ne suffit pas que les côtés soient égaux pour que les losanges soient identiques. On vérifie que les diagonales mesurent 2 et $2\sqrt{2}$.
Les faces CRDV, CRBU et CTGU sont trois faces d'un autre solide dont le huitième sommet est O.
Les faces HWES, HVGS et HWDV en esquissent un troisième, et les faces FTES, FTBU FSGU un quatrième. Le point O est un sommet commun aux quatre.
Les patrons de l'hexaèdre rhombique ont les mêmes caractéristiques que ceux du cube.

**Exercice 3 Chasse aux carrés**

**1. Quadrillage 4 x 4**

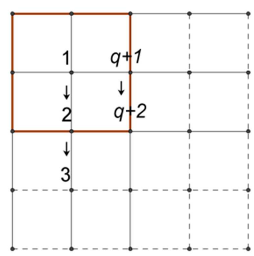


Les carrés dont les supports des côtés sont parallèles aux horizontales ou verticales du quadrillage ont pour côté 1, 2 ou 3.
Il y en a 9 de côté 1, 4 de côté 2 et 1 de côté 3 (pour compter, partir du coin en haut à gauche et décaler d'une unité à droite tant qu'on peut, puis décaler d'une unité vers le bas et recommencer).



Les carrés dont les côtés sont obliques ont pour côté $\sqrt{2}$ (ils sont contenus dans des carrés « droits » de côté 2) ou $\sqrt{5}$ (les côtés sont les hypoténuses de triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit ont des longueurs entières, et leur longueur est inférieure à la dimension du quadrillage). Il y en a 2, symétriques par rapport à l'axe vertical médian.

**2. Comptage de carrés dans un quadrillage $n \times n$**




L'algorithme esquissé au paragraphe précédent permet de compter les carrés dont les supports des côtés sont parallèles aux horizontales ou verticales du quadrillage. On commence en haut à gauche en comptant 1 et on ajoute 1 à chaque étape de la descente. La descente comporte $q$ stades (y compris la position de départ). Chaque nouvelle descente en compte autant, et il y a $q$ descentes. Le nombre de carrés est donc $q^2$. Pour un quadrillage $n \times n$ et des carrés de côté $p$, on a : $q = (n-1) - p + 1$ (il y a $(n-1) - p$ étapes possibles, et il faut compter le carré de départ).
Il y a donc $(n-2)^2$ côtés de côté 2 et $(n-3)^2$ carrés de côté 3.
Tout carré de côté $\sqrt{5}$ est inscrit dans un carré de côté 3 dont les supports des côtés sont parallèles aux verticales ou aux horizontales du quadrillage, et chacun de ces carrés de côté 3 circonscrit 2 carrés de côté $\sqrt{5}$. Le nombre des carrés de côté $\sqrt{5}$ dans un quadrillage $n \times n$ est donc $2 \times (n-3)^2$

**3. Quadrillage $9 \times 9$**

Ce qui précède nous permet de trouver le nombre de carrés de côté 7 : il y en a $(9-7)^2 = 4$.
$\sqrt{29}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 et 5. Tout carré de côté $\sqrt{29}$ est inscrit dans un carré dont les supports des côtés sont parallèles aux verticales ou aux horizontales du quadrillage et mesurent 7. Mais, par symétrie, tout carré de côté 7 contient deux carrés de côté $\sqrt{29}$. Juliette a donc raison.

**4. Inventaire des carrés contenus dans un quadrillage $9 \times 9$**

On doit dénombrer les carrés dont les supports des côtés sont parallèles aux horizontales ou aux verticales du quadrillage (de côté 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8) et les carrés obliques qu'ils contiennent.

Le tableau ci-dessous permet d'en faire l'inventaire. Il y a deux carrés « obliques » de chaque taille contenus dans un carré « droit » donné, sauf pour les carrés droits de côté 1 et pour les carrés droits dont le côté est un nombre pair $2p$, qui contiennent un seul carré oblique de côté $p\sqrt{2}$.

| **Côté** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif des carrés « droits »** | 64 | 49 | 36 | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 |
| **Côtés des carrés contenus** | | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{10}, 2\sqrt{2}$ | $\sqrt{17}, \sqrt{13}$ | $\sqrt{26}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{2}$ | $\sqrt{37}, \sqrt{29}, 5$ | $\sqrt{50}, \sqrt{40}, \sqrt{34}, 4\sqrt{2}$ |
| **Effectif pour un** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Effectif des carrés « obliques »** | 0 | 49 | 72 | 75 | 64 | 45 | 24 | 7 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Total par taille** | 64 | 98 | 108 | 100 | 80 | 54 | 28 | 8 |

Il y a donc 540 carrés réalisables dans un quadrillage $9 \times 9$

***Une autre façon de compter***

*Pour compter les carrés « obliques » inscrits dans un carré « droit », il suffit de compter les sommets des carrés inscrits situés sur un des côtés. Pour un carré « droit » de côté $n$ (quadrillage $(n+1) \times (n+1)$, il y en a $(n-1)$, car un côté d'un des carrés « obliques » est déterminé par la donnée d'un point du côté horizontal haut du carré droit.*

*Ce résultat explique la ligne 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 du tableau précédent.*

*La méthode évite également les problèmes de parité rencontrés.*